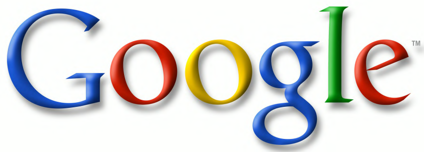


Leçons

de

Géométrie élémentaire

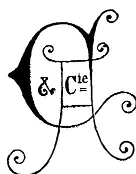
Cours complet de Mathématiques élémentaires
Publié sous la direction de **M. DARBOUX**, doyen de la Faculté des Sciences de Paris.

Leçons
de
Géométrie
élémentaire
(Géométrie plane)

PAR

Jacques Hadamard

Maître de conférences à la Faculté des Sciences de Paris,
Professeur suppléant au Collège de France.



PARIS
Armand Colin & Cie, Éditeurs
5, rue de Mézières, 5

1898

AVERTISSEMENT

En rédigeant ces *Leçons de Géométrie*, je n'ai pas perdu de vue le rôle tout spécial que joue cette science dans l'ensemble des Mathématiques élémentaires.

Placée à l'entrée de l'enseignement mathématique, elle est, en effet, la forme la plus simple et la plus accessible du raisonnement. La portée des méthodes, leur fécondité y sont plus immédiatement tangibles que celles des théories relativement abstraites de l'Arithmétique ou de l'Algèbre. Par là, elle se montre capable d'exercer, sur l'activité de l'esprit, une influence indéniable. J'ai cherché, avant tout, à développer cette influence en éveillant et en secondant le plus possible l'initiative de l'étudiant.

C'est ainsi qu'il m'a paru nécessaire de multiplier les exercices autant que le comportait le cadre de l'ouvrage. Cette nécessité a été, pour ainsi dire, la seule règle qui m'ait guidé dans cette partie de mon travail. J'ai cru devoir proposer des questions de difficulté très différente et graduellement croissante : tandis que les exercices placés à la fin de chaque chapitre, surtout les premiers d'entre eux, sont très simples, ceux que j'ai insérés après chaque livre sont d'une solution moins immédiate; enfin j'ai rejeté à la fin du volume des énoncés de problèmes relativement difficiles. Certaines questions sont empruntées à des

théories importantes — citons parmi celles-là celles qui sont relatives à l'inversion et aux systèmes de cercles, et dont beaucoup proviennent du mémoire *Sur les relations entre les groupes de points, de cercles et de sphères dans le plan et dans l'espace*, de M. Darboux (1) — ; d'autres, au contraire, n'ont d'autre prétention que de rompre l'esprit à la pratique du raisonnement. Je n'ai pas été moins éclectique dans le choix des sources auxquelles j'ai puisé : à côté des exercices classiques qui se présentent comme les applications les plus immédiates de la théorie et qu'on serait presque étonné de ne pas rencontrer dans ce traité, on en trouvera qui sont empruntés à divers auteurs et à divers recueils périodiques français ou étrangers, et aussi un assez grand nombre qui sont originaux.

D'autre part, j'ai inséré à la fin de l'ouvrage une note dans laquelle j'ai voulu résumer les premiers principes de la méthode mathématique : principes dont les commençants devraient être pénétrés dès la première année d'enseignement et que, cependant, l'on voit trop souvent méconnus par les élèves même de nos écoles supérieures. La forme dogmatique que j'ai dû adopter n'est pas, il faut l'avouer, celle qui convient le mieux dans l'espèce : un tel sujet doit s'enseigner par une sorte de dialogue dans lequel chaque règle intervient au moment même où sa nécessité apparaît. J'ai cru, malgré tout, devoir tenter cette exposition, espérant trouver le lecteur indulgent à ce qu'elle présentera de forcément imparfait. Puisse cet essai, tel qu'il est, rendre quelques services et contribuer à faire pénétrer dans l'enseignement des idées sur l'importance desquelles on ne doit point se lasser d'insister.

Les autres notes placées également à la fin du volume, ont un caractère plus spécial. La note B traite du Postulatum

(1) *Annales scientifiques de l'École normale supérieure*, 2me série, t. I, 1872. — L'exercice 401 (construction des cercles tangents) m'a été communiqué par M. Gérard, professeur au lycée Ampère.

d'Euclide. Les idées des géomètres modernes sur cette question ont pris une forme assez claire et assez définitive pour qu'il soit possible et utile d'en donner un aperçu, même dans un ouvrage élémentaire.

La note C est relative au problème des cercles tangents. Ainsi que l'a signalé M. Kœnigs (1), la solution connue de Gergonne, même complétée par la synthèse que son auteur avait négligée, laisse subsister un desideratum. C'est cette lacune que je me suis proposé de combler.

Enfin la note D est consacrée à la notion d'aire. La théorie ordinaire de l'aire présente, comme on sait, un grave défaut logique. Elle suppose *a priori* que cette grandeur est définie et jouit de certaines propriétés fondamentales. La théorie que j'expose dans la note en question, et dans laquelle on se passe de ce *postulatum*, doit donc être préférée, surtout si l'on songe qu'elle s'applique à l'espace sans changement notable.

Dans le texte même, divers raisonnements classiques ont pu être modifiés avantageusement, soit sous le rapport de la rigueur, soit sous le rapport de la simplicité : de ce nombre est, par exemple, dès les commencements du premier livre, la démonstration relative à la perpendiculaire élevée sur une droite par un de ses points; les considérations de continuité habituellement invoquées en cet endroit devaient en être écartées, du moment que l'on admet, d'autre part, sans démonstration la possibilité de diviser une droite ou un angle en deux parties égales. — La considération des sens de rotation des angles m'a permis de donner aux énoncés du second livre, ainsi qu'à plusieurs des suivants, toute leur netteté et toute leur généralité sans les rendre moins simples ni moins élémentaires.

Les théories exposées dans les *Compléments du troisième Livre* sont celles qui, tout en n'étant pas comprises dans les

(1) *Leçons de l'agrégation classique de Mathématiques*, p. 92; Paris, Hermann, 1892.

éléments de géométrie tels que les a constitués Euclide, n'en ont pas moins pris place d'une façon définitive dans l'enseignement. Je me suis borné aux éléments de ces théories et j'ai systématiquement écarté celles qui n'ont pas une réelle importance. La rédaction de l'ouvrage est d'ailleurs telle que les compléments, ainsi que quelques parties imprimées en petits caractères, puissent être passés dans une première lecture sans que le reste cesse d'être cohérent.

M. Darboux, qui m'a fait l'honneur de me confier la rédaction de ce travail, m'a rendu la tâche singulièrement aisée par les précieux conseils qu'il n'a cessé de me donner pour sa composition. Je ne voudrais pas terminer cette préface sans lui offrir l'hommage de ma reconnaissance.

Jacques HADAMARD.

TABLE DES MATIÈRES

AVERTISSEMENT.. v

TABLE DES MATIÈRES.. IX

INTRODUCTION.. 1

1. Volumes, surfaces, lignes, points........................... 1
2. Figures égales.. 1
3-4. Des propositions... 2-3
5-7. Ligne droite; segments de droites; leur comparaison......... 3-4
8. Du plan.. 4

LIVRE PREMIER

DE LA LIGNE DROITE

CHAPITRE PREMIER. — **Des angles**...................... 5

9-11. Comparaison des angles....................................... 5-6
12. Deux angles opposés par le sommet sont égaux................. 6
13. Droites perpendiculaires. — Par un point pris sur une droite, on peut mener une perpendiculaire à cette droite, et on n'en peut mener qu'une. — Angles droits, aigus, obtus........... 7
14-16. Somme des angles formés, d'un même côté d'une droite, par plusieurs demi-droites issues d'un point de cette droite. — Somme des angles formés, autour d'un même point, par plusieurs droites issues de ce point......................... 9
17. Les bissectrices des quatre angles déterminés par deux droites qui se coupent forment deux droites indéfinies, perpendiculaires entre elles.. 10
18-19. Par un point pris hors d'une droite, on peut mener une perpendiculaire à cette droite, et on n'en peut mener qu'une. — Symétrie par rapport à une droite...................... 10-11
20. Sens de rotation des angles. — Il est altéré dans la symétrie par rapport à une droite.................................... 11

Exercices 1-4... 13

CHAPITRE II. — **Des triangles** 14
21-22. Polygones en général. — Triangles 14-15
23. Propriétés du triangle isoscèle 15
24. Cas d'égalité des triangles 16
25. L'angle extérieur d'un triangle est plus grand qu'un angle intérieur non adjacent. — Dans tout triangle, à un plus grand côté est opposé un plus grand angle, et réciproquement 18
26. La ligne droite est plus courte que toute ligne brisée terminée aux mêmes extrémités 19
27. Lignes brisées enveloppées et enveloppantes 20
28. Quand deux triangles ont un angle inégal compris entre côtés égaux chacun à chacun, au plus grand angle est opposé le plus grand côté 21
Exercices 5-15 22

CHAPITRE III. — **Perpendiculaires et obliques** 24
29-31. Perpendiculaires et obliques. — Distance d'un point à une droite. 24
32-33. Lieu des points équidistants de deux points donnés 25-27
Exercices 16-18 27

CHAPITRE IV. — **Cas d'égalité des triangles rectangles. — Propriété de la bissectrice d'un angle** 28
34-35. Cas d'égalité des triangles rectangles 28
36. Propriété de la bissectrice d'un angle 29
Exercices 19-20 30

CHAPITRE V. — **Droites parallèles** 31
37. Angles alternes-internes, correspondants, intérieurs du même côté 31
38-39. Deux droites sont parallèles si elles forment avec une même sécante deux angles intérieurs du même côté supplémentaires, ou deux angles alternes-internes égaux, ou deux angles correspondants égaux. — Par un point pris hors d'une droite, on peut mener une parallèle à cette droite 31
40-43. Par un point pris hors d'une droite, on ne peut mener qu'une parallèle à cette droite. — Réciproques des théorèmes précédents. — Angles qui ont leurs côtés parallèles ou perpendiculaires 32-35
44-44*bis*. Somme des angles d'un triangle ; — d'un polygone quelconque. 35
Exercices 21-25 37

CHAPITRE VI. — **Des parallélogrammes. — Des translations** 38
45-47. Parallélogrammes 38
48-49. Losange, rectangle, carré 40
50-51. Translations 42
Exercices 26-32 43

CHAPITRE VII. — **Droites concourantes dans un triangle** ... 44
52. Perpendiculaires aux milieux des côtés ... 44
53. Hauteurs ... 44
54. Bissectrices ... 45
55-55*bis*. Médianes ... 45
Exercices 33-38 ... 46
Problèmes (39-46) proposés sur le premier livre ... 47

LIVRE II

DU CERCLE

CHAPITRE PREMIER. — **Intersection d'une droite et d'un cercle** ... 49
56-57. Définitions. — Une circonférence est déterminée par trois points. 49-50
58. Intersection d'une droite et d'un cercle ; tangente au cercle ... 50
59-60. Définition générale de la tangente ; normale ; angle de deux cercles ... 51
Exercices 47-49 ... 53

CHAPITRE II. — **Propriétés du diamètre** ... 54
61. Distances maxima et minima d'un point à une circonférence ... 54
62. Le diamètre est un axe de symétrie du cercle ... 54
Exercices 50-51 ... 56

CHAPITRE III. — **Arcs et cordes** ... 56
63. Arcs et cordes égaux ou inégaux ... 56
64. La tangente a, avec la circonférence, deux points communs confondus ... 58
Exercices 52-54 ... 58

CHAPITRE IV. — **Intersection de deux cercles** ... 59
65-66. Discussion de l'intersection ... 59-62
67. Deux circonférences tangentes ont deux points communs confondus ... 62
Exercices 55-59 ... 62

CHAPITRE V. — **Mesure des angles** ... 63
68-69. Mesures en général ... 63-64
70-72. Mesure de l'angle au centre ... 65-66
73-74. Mesure de l'angle inscrit ; — de l'angle formé par une tangente avec une corde passant par son point de contact ... 66-68
75-76. Angle formé par deux sécantes ... 68

77-78. Lieu des points d'où l'on voit un segment de droite donné sous un angle donné 69-70
79-82. Propriétés angulaires du quadrilatère inscriptible 70-71
82*bis***.** Le lieu des sommets des angles égaux et de même sens dont les côtés vont passer par deux points donnés est une circonférence 72
Exercices 60-72 72

CHAPITRE VI. — **Constructions** 74
83-84 Instruments géométriques 74
85. Const. 1-3. Perpendiculaire à une droite. Bissectrice 75
86-87*bis***.** Const. 4-9. Angles, triangles 76-78
88. Const. 10. Parallèle d'un point à une droite 79
89. Usage de l'équerre 79
90. Const. 11-14. Circonférence 80
91-93. Const. 15-18. Tangente à un cercle. Tangentes communes à deux cercles 81-84
94. Const. 19. Cercles tangents à trois droites 86
Exercices 73-91 88

CHAPITRE VII. **Sur le déplacement des figures** 90
95-99. Figures égales et de même sens. Translation, rotation. Symétrie par rapport à un point 90-92
100-100*bis***.** Deux figures égales et de même sens dérivent l'une de l'autre par une translation suivie d'une rotation. Angle de deux figures 92-93
101. Deux figures égales et de même sens dérivent l'une de l'autre par une translation ou une rotation 93
102-103. Autre démonstration (décomposition d'un déplacement en symétries) 93-96
104. Centre instantané de rotation 97
Exercices 92-97 98
Problèmes (98-123) proposés sur le second livre 99

LIVRE III

DE LA SIMILITUDE

CHAPITRE PREMIER. — **Lignes proportionnelles** 102
105-107. Proportions en général 102-104
108-112. Division d'une droite. Division harmonique 104-107
113-114. Théorème fondamental. Parallèle à la base d'un triangle 108-109
115-116. Propriété de la bissectrice. Lieu des points tels que le rapport de leurs distances à deux points donnés soit constant 110-112
Exercices 124-128 113

Chapitre II. — **Similitude des triangles** 113

117. Définition. Lemme 113

118-120. Cas de similitude 114-116

121. Segments interceptés par des droites concourantes sur des parallèles 117

Exercices 129-134 118

Chapitre III. — **Relations métriques relatives aux triangles** 119

122. Projections 119

123-125. Triangles rectangles. Carré de l'hypoténuse 119-121

126-127. Triangles quelconques. Théorème de Stewart 121-122

128-130 *bis*. Calcul des lignes remarquables 123-126

Exercices 135-145 127

Chapitre IV. — **Lignes proportionnelles dans le cercle. Axe radical** 128

131-135. Puissance d'un point par rapport à un cercle 128-130

136-138. Axe radical 131-132

139. Centre radical 132

Exercices 146-154 *bis* 133

Chapitre V. — **Homothétie et similitude** 134

140-142. Propriétés générales 134-135

143. Cas de deux circonférences 136

144-145. Deux figures homothétiques d'une même troisième sont homothétiques entre elles. Axes de similitude de trois cercles.... 137-138

146-149. Similitude des polygones 139-141

150-150 *bis*. Point autohomologue 142

Exercices 155-162 143

Chapitre VI. — **Constructions** 145

151-152. Const. 1-3 *bis*. Droites proportionnelles. Polygones semblables.. 145-146

153-156. Const. 4-9. Moyenne proportionnelle ; ligne $x = \sqrt{a^2 \pm b^2}$; lignes données par leur somme ou leur différence et leur produit ; moyenne et extrême raison 147-150

157. Const. 10. Points dont les distances à des droites données ont entre elles des rapports donnés 152

158. Const. 11-13. Tangentes communes ; axe radical ; cercles orthogonaux 153

159. Const. 14-15. Cercles, tangents à une droite ou à une circonférence donnée, menés par deux points donnés 154

Exercices 163-177 155

Chapitre VII. — **Polygones réguliers** 157

160-163. Définition et existence des polygones réguliers 157-158

164. Polygones réguliers étoilés 159

165-170. Inscription des polygones réguliers : carré, hexagone, triangle, décagones, pentagones 160-164
171-175. Pentédécagones 165-169
176-178. Mesure de la circonférence. Le rapport de la circonférence au diamètre est un nombre constant 170-172
179. Longueur d'un arc de cercle 173
180-181. Calcul de π. Méthode des périmètres 174-176
182-183. Méthode des isopérimètres 177-179
184. Résultat du calcul 180
Exercices 178-189 181
Problèmes (190-216) proposés sur le troisième livre 182

COMPLÉMENTS DU LIVRE III

CHAPITRE PREMIER. — **Signes des segments** 185
185-187. Convention et identité fondamentale 185-187
188-189. Propriété de la division harmonique 187
190-191. Application à l'homothétie et à la puissance d'un point par rapport à un cercle 189
Exercices 217-222 189

CHAPITRE II. — **Transversales** 191
192-193. Théorème des transversales. — Réciproque 191-192
194-196. Applications : milieux des diagonales d'un quadrilatère complet; triangles homologiques; théorème de Pascal 192-194
197-198. Segments interceptés par des droites issues des sommets d'un triangle et concourantes en un même point 195-196
Exercices 223-231 197

CHAPITRE III. — **Rapport anharmonique. Faisceaux harmoniques** 198
199-201. Définition. Théorème fondamental. Faisceaux harmoniques 198-200
202-203. Propriété du quadrilatère complet. Polaire par rapport à un angle 201
Exercices 232-236 202

CHAPITRE IV. — **Pôles et polaires dans le cercle** 203
204. Définition et construction de la polaire 203
205-206. Théorème des points conjugués. Figures polaires réciproques ... 204-206
207-208. Application aux triangles homologiques et au théorème de Brianchon 206
209-210. Transformation de propriétés métriques 207-208

211. Si, par un point a pris dans le plan d'un cercle, on mène deux sécantes et qu'on joigne deux à deux leurs points d'intersection avec le cercle, les droites de jonction se coupent en deux points dont le lieu est la polaire du point.................. 208

212-213. Rapport anharmonique sur le cercle. Application aux cordes conjuguées.. 209-210

Exercices 237-241.. 210

CHAPITRE V. — **Figures inverses**......................... 211

214-216. Définition. Cercle d'inversion. La symétrie par rapport à une droite est un cas limite de l'inversion...................... 211-212

217-219. Direction et longueur de la ligne qui joint les inverses de deux points donnés. Tangentes aux courbes inverses. Deux lignes se coupent sous le même angle que leurs inverses.......... 212-213

220. Inverse d'une droite.. 214

221-226. Circonférences inverses. Points et cordes antihomologues....... 215-217

227-228. Cercles qui coupent deux circonférences sous le même angle.... 217-219

Exercices 242-257.. 219

CHAPITRE VI. — **Problèmes des cercles tangents**....... 221

229-231. Première solution.. 221-222

232-236. Solution de Gergonne....................................... 223-226

Exercices 258-268.. 227

CHAPITRE VII. — **Propriétés du quadrilatère inscrit.** 228

237-238. Théorème de Ptolémée et sa réciproque. Cas des points en ligne droite.. 228-229

239. Connaissant les cordes de deux arcs a et b, calculer la corde de l'arc $a \pm b$.. 230

240-241. Rapport des diagonales d'un quadrilatère inscrit; calcul de ces diagonales et du rayon du cercle circonscrit................ 230-232

Exercices 269-270*bis*...................................... 233

Problèmes (271-286) proposés sur les compléments du troisième livre... 234

LIVRE IV

DES AIRES

CHAPITRE PREMIER. — **Mesure des aires**................. 237

242-246. Définitions.. 237-238

247. Aire du rectangle... 239

248. Aire du parallélogramme.................................... 241

249-251. Aire du triangle.. 241-242

252-252*bis*. Aire d'un polygone en général; — aire d'un trapèze........... 242-243

253-254 Aire d'un polygone régulier; — d'un secteur polygonal; — d'un polygone circonscrit 243-244
255 Aire d'un quadrilatère inscriptible 245
Exercices 287-301 245

Chapitre II. — **Comparaison des aires** 247
256. Rapport des aires de deux triangles qui ont un angle égal 247
257. Rapport des aires de deux polygones semblables 247
258. Carré de l'hypoténuse 248
Exercices 302-311 249

Chapitre III. — **Aire du cercle** 251
259-260. Définition 251
261-262. Expression. — Aire du secteur circulaire 252-253
263. Aires limitées par des arcs de cercles 253
Exercices 312-318 254

Chapitre IV. — **Constructions** 255
264-267. Triangles et polygones équivalents 255
267. Le problème de la quadrature du cercle ne peut se résoudre à l'aide de la règle et du compas 256
Exercices 319-323 257
Problèmes (324-342) proposés sur le quatrième livre 257

Note A. **Sur la méthode en géométrie** 261
a). Théorèmes à démontrer 261
b). Lieux géométriques. Problèmes de construction 269
c). Méthodes de transformation 272

Note B. **Sur le Postulatum d'Euclide** 278

Note C. **Sur le problème des cercles tangents** 287

Note D. **Sur la notion d'aire** 289

Problèmes divers et problèmes proposés dans différents concours (343-422) 295

INTRODUCTION

1. On nomme *volume* une portion de l'espace limitée en tous sens.

On nomme *surface* la partie commune à deux régions contiguës de l'espace. Une feuille de papier peut nous donner une idée approchée d'une surface. Elle limite, en effet, deux régions de l'espace, celles qui sont situées des deux côtés de la feuille. Mais elle n'est pas rigoureusement une surface, car ces deux régions sont séparées par toute une région intermédiaire, l'épaisseur de la feuille de papier. On arriverait à la notion de surface en considérant une feuille de papier dont l'épaisseur diminuerait indéfiniment.

On nomme *ligne* la partie commune à deux portions contiguës d'une surface. Cette définition est manifestement équivalente à celle-ci : *Une ligne est l'intersection de deux surfaces.*

Les lignes que nous traçons nous donnent une idée des lignes géométriques; idée approchée, car les premières, si minces qu'elles soient, ont toujours une largeur, au lieu que les lignes géométriques n'en ont aucune.

Enfin, on nomme *point* ce qui est commun à deux portions contiguës d'une ligne, ou encore l'intersection de deux lignes qui se rencontrent. Un point n'a aucune dimension.

Un ensemble quelconque de points, de lignes, de surfaces et de volumes a reçu le nom de *figure*.

2. On admet qu'une figure quelconque peut être transportée d'une infinité de façons dans l'espace.

On nomme FIGURES ÉGALES *deux figures que l'on peut transporter l'une sur l'autre, de manière à les faire coïncider exactement dans toutes leurs parties;* en un mot, *deux figures égales sont une seule et même figure, en deux places différentes.*

Une figure à laquelle on ne fait subir que des déplacements, sans la déformer, est encore dite figure *invariable*.

3. La géométrie est l'étude des propriétés des figures et des relations qu'elles ont entre elles.

Les résultats de cette étude sont formulés dans des énoncés qu'on appelle *propositions*.

Une proposition se compose de deux parties : la première, nommée *hypothèse*, indique l'ensemble des conditions dans lesquelles on se place ; l'autre, la *conclusion*, exprime le fait qui, moyennant ces conditions, a nécessairement lieu.

Ainsi, dans cette proposition : *Deux quantités* A, B *égales à une troisième* C *sont égales entre elles*, l'hypothèse est : *les quantités* A, B *sont toutes deux égales à* C ; la conclusion : *ces deux quantités* A, B *sont égales entre elles.*

Parmi les propositions, il s'en trouve que l'on admet comme évidentes sans démonstration. On les appelle des *axiomes*. Telle est, par exemple, la proposition que nous venons de citer : « Deux quantités égales à une troisième sont égales entre elles. » Toutes les autres propositions se nomment *théorèmes* et doivent être démontrées par un raisonnement spécial. Pour faire ce raisonnement, on se place dans les conditions indiquées dans l'hypothèse et, *supposant ces conditions vérifiées*, on doit en déduire les faits énoncés dans la conclusion.

D'après cela, on doit admettre qu'une circonstance a lieu :

1° Si elle fait partie de l'hypothèse ;

2° Si elle fait partie de la définition d'un des éléments dont on parle [1] ;

3° Si elle résulte d'un axiome ;

4° Si elle résulte d'une démonstration antérieure.

Aucun fait ne doit être tenu pour certain, dans un raisonnement géométrique, s'il ne découle d'une des quatre causes précédentes.

4. On nomme *réciproque* d'une proposition une deuxième proposition où la conclusion est formée, totalement ou partiellement, avec l'hypothèse de la première et inversement.

(1) Il arrive souvent que, dans le cours d'une démonstration, on introduit dans la figure des éléments auxiliaires. Un fait peut alors être vrai en vertu de la définition de ces nouveaux éléments. On dit alors qu'il est vrai par *construction*.

On nomme *corollaire* une conséquence immédiate d'un théorème.

Un *lemme* est, au contraire, une proposition préparatoire destinée à faciliter la démonstration d'une suivante.

5. La plus simple des lignes est la ligne droite, dont un fil tendu nous offre l'image. La notion de la ligne droite est claire par elle-même; pour la faire entrer dans nos raisonnements, nous considérerons la ligne droite comme définie par ses propriétés évidentes, en particulier par les deux suivantes :

1° *Toute figure égale à une ligne droite est une ligne droite;* et inversement, *toute ligne droite indéfinie peut être amenée à coïncider avec toute autre, et cela, de manière qu'un point quelconque de la première vienne sur un point quelconque de la seconde;*

2° *Par deux points on peut faire passer une ligne droite, et on n'en peut faire passer qu'une.*

Ainsi on peut parler de *la* ligne droite qui passe par les points A et B ou, plus brièvement, de la ligne droite AB.

De la définition résulte immédiatement que *deux droites différentes ne peuvent se rencontrer qu'en un point*, puisque, si elles avaient deux points communs, elles ne seraient pas distinctes.

On nomme *ligne brisée* une ligne composée de portions de lignes droites. Les autres lignes, qui ne sont ni droites ni brisées, sont dites *courbes*.

6. La portion de ligne droite comprise entre deux points A et B s'appelle le *segment* de droite AB, ou encore la distance AB.

On peut considérer aussi une portion de droite indéfinie dans un sens et limitée, dans l'autre, par un point. C'est ce que l'on nomme une *demi-droite*.

Deux demi-droites quelconques sont, d'après ce qui précède, deux figures égales.

La distance AB est dite *égale* à la distance A′B′, si on peut transporter le premier segment sur le second, de manière à ce que le point A vienne en A′ et le point B en B′.

Dans ces conditions, les deux segments coïncideront dans toute leur étendue, d'après les deux propositions qui servent de définition à la ligne droite. Par conséquent, la définition des segments égaux concorde bien avec la définition générale des figures égales, donnée plus haut.

La coïncidence des segments égaux AB, A′B′ peut être établie de deux façons différentes, à savoir : le point A venant en A′ et le point B en B′, ou inversement, ce qui revient à dire qu'on peut retourner le segment AB de manière à ce que chacun des points A, B vienne prendre la place de l'autre. Dans ce dernier déplacement, il y a un point du segment qui se retrouve à sa place primitive : c'est le *milieu* de AB.

7. Quand deux segments AB, BC sont sur la même droite, en prolongement l'un de l'autre (*fig.* 1), le segment AC est dit la *somme* des deux premiers. La somme de deux, et par suite de plusieurs segments est indépendante de l'ordre des parties [1].

Pour comparer deux segments, on les transporte sur la même droite, de façon qu'ils partent du même point et soient dirigés dans le même sens, par exemple en AB et AC (*fig.* 1 et 2). Si alors les

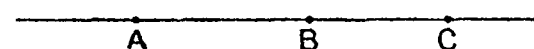


FIG. 1.

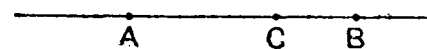


FIG. 2.

points se suivent dans l'ordre A, B, C (*fig.* 1), le segment AC est égal à la somme de AB et d'un autre segment BC ; dans ce cas, il est dit *plus grand* que AB, et celui-ci *plus petit* que BC; si au contraire l'ordre est A, C, B (*fig.* 2), c'est le segment AB qui est plus grand que AC. Dans les deux cas, le troisième segment BC qui, ajouté à l'un des deux premiers, reproduit l'autre, se nomme la *différence* des deux premiers. Enfin les points B et C peuvent coïncider. Dans ce cas, nous savons que les segments donnés sont égaux.

8. On nomme *plan* une surface indéfinie telle que toute droite joignant deux points de cette surface y soit contenue tout entière.

On admet que *par trois points quelconques de l'espace il passe un plan*. Une ligne droite indéfinie tracée sur un plan sépare sur cette surface deux régions situées chacune d'un côté de la droite et que l'on nomme des *demi-plans*. On ne peut passer par un chemin continu de l'une de ces régions à l'autre sans traverser la droite.

Nous nous occuperons tout d'abord des figures tracées sur un plan et dont l'étude constitue la géométrie plane.

(1) Pour deux segments, cela résulte immédiatement de la remarque précédente (**6**).

LIVRE I

DE LA LIGNE DROITE

CHAPITRE PREMIER

DES ANGLES

9. On nomme *angle* la figure formée par deux demi-droites issues du même point. Ce point est dit le *sommet* de l'angle et les deux demi-droites en sont les *côtés*.

On désigne un angle par la lettre de son sommet, placée entre deux autres lettres qui désignent ses côtés, et surmontée souvent d'un signe spécial. Si cependant la figure ne renferme qu'un seul angle ayant le sommet considéré, la lettre de ce sommet suffira pour désigner l'angle. Ainsi l'angle des deux demi-droites AB, AC (*fig*. 3) sera désigné par $\widehat{BAC}$ ou, plus simplement, par $\widehat{A}$.

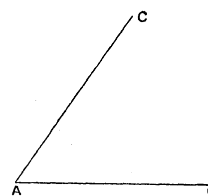


Fig. 3.

10. Deux angles sont dits *égaux*, conformément à la définition des figures égales (**2**), si, en les transportant l'un sur l'autre, on arrive à les faire coïncider.

Deux angles égaux $\widehat{BAC}$, $\widehat{B'A'C'}$ peuvent être placés l'un sur l'autre de deux façons différentes, savoir : ou bien le côté A'B' venant sur AB et A'C' sur AC, ou l'inverse. On passe de l'une à l'autre en retournant l'un des deux angles sur lui-même, par exemple en déplaçant

l'angle $\widehat{BAC}$ de manière à ce que AB vienne dans la position occupée primitivement par AC, et réciproquement. Dans ce retournement, il y a une demi-droite intérieure à l'angle qui ne change pas, c'est celle qui divise l'angle en deux parties égales et qu'on appelle la *bissectrice* de l'angle $\widehat{BAC}$.

11. On dit que deux angles sont *adjacents* lorsqu'ils ont même sommet, un côté commun, et sont situés de part et d'autre de ce côté commun.

Lorsque deux angles $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$ sont adjacents (*fig.* 4), l'angle $\widehat{AOC}$ est dit la *somme* des deux premiers.

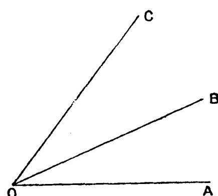


Fig. 4.

La somme de plusieurs angles est indépendante de l'ordre des parties.

Pour comparer deux angles, on les transporte de manière à ce qu'ils aient même sommet, un côté commun, et qu'ils soient du même côté par rapport au côté commun. Soient $\widehat{AOB}$, $\widehat{AOC}$ les deux angles ainsi placés. Si, en tournant autour du point O, on rencontre les côtés dans l'ordre OA, OB, OC (*fig.* 4), l'angle $\widehat{AOC}$ est égal à la somme de $\widehat{AOB}$ et d'un autre angle $\widehat{BOC}$; dans ce cas, il est dit *plus grand* que $\widehat{AOB}$ et celui-ci *plus petit* que $\widehat{AOC}$; si, au contraire (*fig.* 5), l'ordre est OA, OC, OB, c'est l'angle $\widehat{AOB}$ qui est plus grand que $\widehat{AOC}$. L'angle $\widehat{BOC}$ qui, ajouté à l'un des deux angles donnés, reproduit l'autre, est la *différence* des deux premiers.

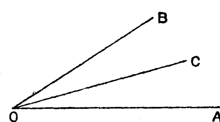


Fig. 5.

Enfin, dans le cas intermédiaire où OB coïncide avec OC, les deux angles sont égaux.

Un angle est dit *double*, *triple*, etc., d'un autre s'il est la somme de deux, trois, etc., angles égaux à cet autre. Celui-ci sera dit alors la *moitié*, le *tiers*, etc., du premier.

Remarque. — On voit que *la grandeur d'un angle ne dépend pas de la grandeur de ses côtés*, qu'il faut toujours supposer prolongés indéfiniment.

12. Nous avons dit qu'un angle était formé par deux demi-droites

telles que OA, OB (*fig.* 6). Si l'on prolonge OA au delà du point O suivant OA′, et de même OB suivant OB′, on forme un nouvel angle A′OB′.

On nomme *angles opposés par le sommet* deux angles $\widehat{AOB}$, $\widehat{A'O'B'}$, *tels que les côtés de l'un soient les prolongements des côtés de l'autre.*

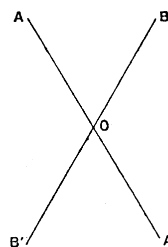


Fig. 6.

Théorème. — *Deux angles opposés par le sommet sont égaux.*

Retournons en effet sur lui-même (**10**) l'angle $\widehat{BOA'}$ (*fig.* 6). Le côté OB viendra prendre la place de OA′, et d'autre part, le côté OA′ venant occuper l'ancienne position de OB, la demi-droite OA, prolongement de OA′, viendra en OB′, prolongement de OB. L'angle $\widehat{AOB}$ vient donc prendre la place de $\widehat{A'OB'}$, d'où résulte que ces deux angles sont égaux.

13. On dit qu'une droite est *perpendiculaire* sur une autre lorsqu'elle forme avec elle deux angles adjacents égaux entre eux. Par exemple, la droite AOA′ (*fig.* 7) est perpendiculaire sur BOB′ si les angles numérotés 1 et 2 sur la figure sont égaux. Dans ce cas, les quatre angles en O sont égaux entre eux, car les angles $\widehat{3}$ et $\widehat{4}$ sont respectivement égaux à $\widehat{1}$ et $\widehat{2}$ comme opposés par le sommet. En particulier, la *deuxième droite* BOB′ *est également perpendiculaire sur la première*, puisque les angles $\widehat{2}$ et $\widehat{3}$ sont égaux. Un angle dont les côtés sont perpendiculaires entre eux est dit *droit*.

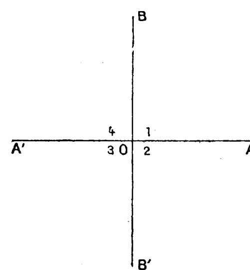


Fig. 7.

Théorème. — *Dans un plan, par un point pris sur une droite, on peut mener à cette droite une perpendiculaire, et l'on n'en peut mener qu'une.*

1° *On peut mener une perpendiculaire* (*fig.* 8). Soient AB la droite donnée, O le point donné sur cette droite. Par ce point, dans l'un des deux demi-plans déterminés par AB, menons une demi-droite quelconque OC. Si les angles $\widehat{AOC}$, $\widehat{BOC}$ sont égaux, notre conclusion est

établie. Sinon, supposons, pour fixer les idées, que l'angle $\widehat{AOC}$ est le plus petit des deux. Transportons cet angle de manière à ce que OA vienne en OB; OC viendra dans une position OD telle que $\widehat{DOB} = \widehat{COA}$. Si nous menons la bissectrice OH de l'angle $\widehat{COD}$, cette droite répondra à la question, car les angles $\widehat{AOH}$, $\widehat{BOH}$ sont égaux comme sommes d'angles égaux.

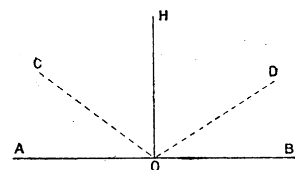


Fig. 8.

2° *On n'en peut mener qu'une.* Je dis qu'une droite OH′, différente de OH, ne peut être perpendiculaire à AB (*fig.* 9). En effet, une pareille droite tombera nécessairement dans un des angles $\widehat{AOH}$, $\widehat{HOB}$. Si, par exemple, elle est dans l'angle $\widehat{HOB}$, l'angle $\widehat{H'OA}$ sera plus grand que $\widehat{HOA}$, et l'angle $\widehat{H'OB}$ plus petit que $\widehat{HOB}$. Les angles $\widehat{HOA}$ et $\widehat{HOB}$ étant égaux, l'angle $\widehat{H'OA}$ sera nécessairement plus grand que $\widehat{H'OB}$.

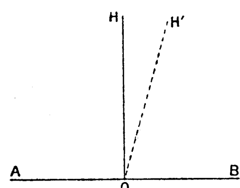


Fig. 9.

Corollaire. — *Tous les angles droits sont égaux* (*fig* 10).

Soient en effet BOA, B′O′A′ deux angles droits, de sorte que OB est perpendiculaire sur OA, O′B′ sur O′A′. Transportons $\widehat{A'O'B'}$ sur $\widehat{AOB}$, de manière que O′ vienne en O et O′A′ sur OA. O′B′, qui est perpendiculaire sur O′A′, devra prendre une position perpendiculaire sur OA, c'est-à-dire (théor. précédent) coïncider avec OB.

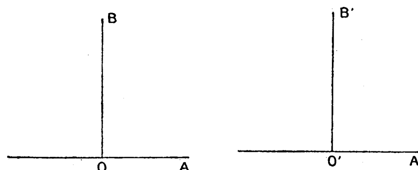


Fig. 10.

C. Q. F. D.

On nomme angle *aigu* un angle plus petit que l'angle droit; angle *obtus*, un angle plus grand que l'angle droit.

Deux angles sont dits *complémentaires* si leur somme est égale à un angle droit, *supplémentaires* si leur somme est égale à deux droits.

Le supplément d'un angle étant ce qui manque à cet angle pour

faire deux droits, un angle n'a qu'un seul supplément. De même, un angle n'a qu'un seul complément.

14. Théorème. — *Deux angles adjacents qui ont leurs côtés extérieurs en ligne droite sont supplémentaires.*

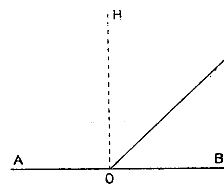


Fig. 11.

Soient les angles AOC, COB (*fig.* 11), AO et OB étant en prolongement : je dis que AOC + COB = 2 droits. Menons la perpendiculaire OH à OB. L'angle AOC étant égal à AOH + HOC, la somme AOC + COB peut s'écrire AOH + HOC + COB, ou (puisque HOC + COB = HOB) AOH + HOB. Elle est donc bien égale à 2 droits.

15. Réciproque. — *Si deux angles adjacents sont supplémentaires, leurs côtés extérieurs sont en ligne droite.*

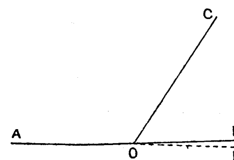


Fig. 12.

Soient les angles AOC et COB (*fig.* 12), qui sont supplémentaires.

Si OB n'était pas le prolongement de OA, soit OB′ ce prolongement. L'angle COB′ est le supplémentaire de AOC ; il est donc égal à COB ; et, comme il est du même côté de OC, ceci exige (**11**) que OB′ coïncide avec OB.

Remarque. — On voit que, pour démontrer cette réciproque, nous avons utilisé le théorème primitif. C'est là un mode de raisonnement très généralement employé pour la démonstration des réciproques.

16. Théorème. — *Si par un point d'une droite on mène, d'un même côté de cette droite, plusieurs demi-droites, la somme des angles successifs ainsi formés est égale à deux droits.*

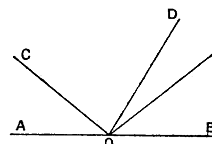


Fig. 13.

La somme des quatre angles AOC, COD, DOE, EOB (*fig.* 13) est bien égale à deux droits, car la somme des trois premiers donne l'angle AOE, qui est supplémentaire de EOB.

Théorème. — *Si par un point on mène plusieurs demi-droites, la somme des angles successifs ainsi formés tout autour du point est égale à quatre droits.*

Ainsi, la somme AOB + BOC + COD + DOA (*fig.* 14) est égale à 4 droits.

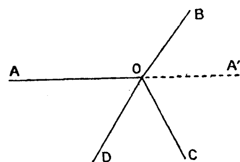


Fig. 14.

En effet, prolongeons AO suivant OA'. On a (théorème précédent) :

AOB + BOA' = 2 droits
A'OC + COD + DOA = 2 droits.

D'où, en ajoutant membre à membre,

AOB + BOA' + A'OC + COD + DOA = 4 droits,

c'est-à-dire l'égalité annoncée, puisque BOA' + A'OC = BOC.

17. Théorème. — *Les bissectrices des quatre angles formés par deux droites concourantes forment deux droites indéfinies, perpendiculaires entre elles.*

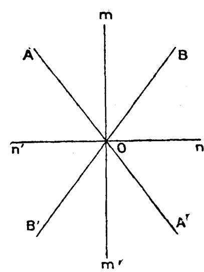


Fig. 15.

Soient AA', BB' (*fig.* 15) deux droites qui se coupent en O et forment les angles AOB, BOA', A'OB', B'OA, dont les bissectrices sont Om, On, Om', On'; je dis :

1° Que Om, Om' sont en prolongement, ainsi que On, On'.

2° Que les deux droites ainsi formées sont perpendiculaires.

En premier lieu Om est perpendiculaire sur On. Car, les deux angles AOB et BOA' ayant pour somme deux droits, leurs moitiés mOB et BOn ont pour somme un droit.

Mais, en appliquant le même raisonnement aux angles BOA' et A'OB', on verrait que Om' est perpendiculaire sur On. Donc Om' est le prolongement de Om; et l'on démontrerait pareillement que On' est le prolongement de On.

18. Théorème. — *Par un point pris hors d'une droite, on peut mener une perpendiculaire à cette droite, et on n'en peut mener qu'une.*

1° *On peut mener une perpendiculaire.* — Soient le point O et la droite xy (*fig.* 16). Autour de xy comme charnière, faisons tourner le demi-plan qui contient le point O pour le rabattre sur l'autre demi-plan. Le point O vient en O'. Joignons OO'.

Cette droite coupe xy, puisqu'elle réunit deux points situés de part et d'autre de xy. Si I est le point d'intersection, les angles O'Ix

et OIx sont égaux, car $O'Ix$ est la position que vient prendre OIx quand on rabat l'un des demi-plans sur l'autre par une rotation autour de xy. Donc les deux droites xy et OO' sont perpendiculaires.

2° *On n'en peut mener qu'une.* Soit en effet OM une perpendiculaire à xy menée par O : prolongeons cette droite d'une longueur MO'' égale à elle-même. Si nous rabattons de nouveau l'un des demi-plans sur l'autre, la droite MO vient sur MO'', puisque les angles OMx et $O''Mx$ sont égaux comme droits; et, comme $MO'' = MO$, le point O vient en O''. Donc le point O'' coïncide avec O' et la droite OO'' avec OO'.

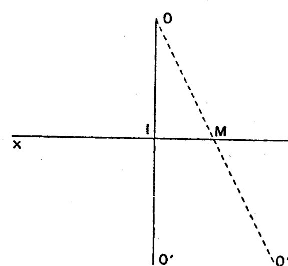


Fig. 16.

C. Q. F. D.

19. On nomme *symétrique* d'un point par rapport à une droite xy, l'extrémité de la perpendiculaire menée du point O à la droite et prolongée d'une longueur égale à elle-même. Il résulte des considérations précédentes que ce symétrique n'est autre que la nouvelle position occupée par le point O après la rotation autour de xy.

Étant donnée une figure quelconque, on peut prendre le symétrique de chacun de ses points. L'ensemble des symétriques ainsi construits constitue une nouvelle figure qui est dite la symétrique de la première. On voit que pour prendre la figure symétrique d'une figure donnée par rapport à une droite xy, on peut faire tourner le plan qui porte la figure autour de xy, de manière à ce que chacun des demi-plans déterminés par cette droite vienne prendre la place de l'autre, et marquer la nouvelle position que vient prendre la figure primitive. Il en résulte :

Théorème. — *Deux figures planes symétriques sont égales.*

Corollaire. — *La figure symétrique d'une droite est une droite.*

Lorsqu'une figure coïncide avec sa symétrique par rapport à xy, on dit qu'elle est symétrique par rapport à cette droite, ou encore qu'elle admet cette droite comme *axe de symétrie*.

20. Pour faire coïncider une figure F avec sa symétrique F', nous avons dû employer un mouvement qui a fait sortir la figure de son

plan. Il faut observer que la coïncidence ne peut être établie sans un tel mouvement; cela tient à ce que les *sens de rotation* sont inverses dans les deux figures. Nous allons expliquer ce qu'il faut entendre par cette locution.

Nous remarquerons d'abord que le plan de la figure divise l'espace en deux régions. Pour abréger, nous appellerons l'une de ces régions celle qui est située au-dessus du plan; l'autre, celle qui est située au-dessous.

Soit maintenant, dans la figure F, un angle $\widehat{BAC}$ que l'on peut considérer comme décrit par une demi-droite mobile à l'intérieur de l'angle de la position AB à la position AC (*fig.* 17). *Vu d'en dessus*, cet angle $\widehat{BAC}$ sera dit avoir comme sens de rotation le sens *rétrograde* ou le sens *direct*, suivant que la demi-droite paraît tourner dans le sens des aiguilles d'une montre ou en sens inverse [1]. Plaçons-nous, pour fixer les idées, dans ce dernier cas. Alors un observateur couché le long de AB, les pieds en A, la tête dans la direction de B et regardant le dessous du plan, verra le côté AC à sa gauche; et, par suite, si, restant allongé sur AB, il regarde le côté AC, il verra le dessous du plan à sa droite.

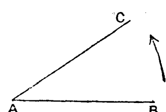


Fig. 17.

Il est clair que pour le sens de rotation d'un angle vu *d'en dessous*, on pourrait répéter tout ce qui précède, en y remplaçant le mot *dessus* par le mot *dessous*, et inversement.

Comme un observateur allongé suivant AB et regardant AC aura nécessairement le dessus du plan à sa gauche s'il a le dessous à sa droite, et inversement, nous voyons que *le sens de rotation change suivant qu'on l'envisage d'un côté ou de l'autre du plan* [2].

Supposons maintenant que l'angle se déplace d'une façon quelconque dans son plan sans le quitter à aucun moment. L'observateur entraîné dans ce mouvement ne changera pas de situation par rapport au-dessus ou au-dessous du plan, de sorte que *le sens de rotation reste inaltéré par tout déplacement qui ne fait pas sortir la figure de son plan*.

(1) On remarquera que, pour définir le sens de rotation, il faut tenir compte de l'ordre des côtés. Ainsi l'angle $\widehat{BAC}$ est de sens contraire à l'angle $\widehat{CBA}$.

(2) C'est ainsi que l'écriture, vue par transparence à travers la feuille, semble renversée.

Pour démontrer qu'un tel mouvement ne peut amener une figure F sur sa symétrique F', il suffit donc de faire voir que les sens de rotation sont inverses dans les deux figures. Or nous avons vu qu'on passe de F à F' en retournant le plan sur lui-même par une rotation autour de xy (**19**). Dans ce retournement, les points situés au-dessus du plan passent en dessous, et réciproquement. Le sens de rotation d'un angle de F, vu d'en dessous, est donc le même que le sens de rotation de son symétrique, vu d'en dessus ; de sorte que, vus du même côté, les sens de rotation sont inverses.

C. Q. F. D.

EXERCICES

1. M étant le milieu d'un segment de droite AB, la distance CM est égale à la demi-différence de CA et de CB si C est un point intérieur au segment, et à la demi-somme de CA et de CB si C est pris sur l'un des prolongements de AB.

2. OM étant la bissectrice d'un angle $\widehat{AOB}$, l'angle $\widehat{COM}$ est égal à la demi-différence de $\widehat{COA}$ et de $\widehat{COB}$ si la demi-droite OC est à l'intérieur de l'angle $\widehat{AOB}$; et au supplément de cette demi-différence si la demi-droite OC est dans l'angle $\widehat{A'OB'}$, opposé par le sommet à $\widehat{AOB}$. Il est égal à la demi-somme de $\widehat{COA}$ et de $\widehat{COB}$, si cette demi-droite est dans un des deux autres angles formés par les droites AOA', BOB'.

3. Si du point O sont issues quatre demi-droites OA, OB, OC, OD (se suivant dans l'ordre où elles viennent d'être nommées), telles que $\widehat{AOB} = \widehat{COD}$ et que $\widehat{BOC} = \widehat{DOA}$, démontrer que OA et OC sont en prolongement, ainsi que OB et OD.

4. Si les quatre demi-droites consécutives OA, OB, OC, OD sont telles que les bissectrices des angles $\widehat{AOB}$, $\widehat{COD}$ sont en ligne droite, ainsi que les bissectrices des angles $\widehat{BOC}$, $\widehat{AOD}$, ces quatre demi-droites sont en prolongement deux à deux.

CHAPITRE II

DES TRIANGLES

21. On nomme *polygone* une portion de plan limitée par des portions de lignes droites (*fig.* 18) Ces dernières ont les *côtés* du polygone. Leurs extrémités en sont les *sommets*.

Toutefois nous ne donnerons, en général, le nom de polygone qu'à des portions de plan limitées par un contour unique pouvant être décrit d'un seul trait continu. Ainsi la portion de plan qui est ombrée dans la figure 19 ne sera pas pour nous un polygone.

Un polygone est dit *convexe* (*fig.* 18) si, en prolongeant chaque

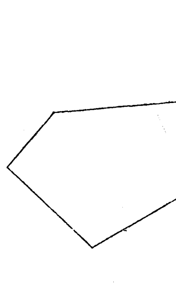


Fig. 18.

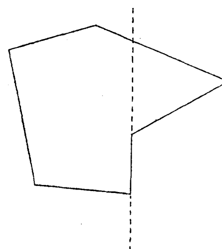


Fig. 18 *bis*.

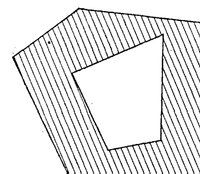


Fig. 19.

côté indéfiniment, aucune des droites ainsi obtenues ne traverse le polygone. Dans le cas contraire (*fig.* 18 *bis*) il est dit *concave*.

On classe les polygones d'après le nombre des côtés. Ainsi, les plus simples des polygones sont : le polygone de 3 côtés ou *triangle*, le polygone de 4 côtés ou *quadrilatère*, le polygone de 5 côtés ou *pentagone*, le polygone de 6 côtés ou *hexagone*. Nous aurons encore à considérer les polygones de 8, 10, 12, 15 côtés, nommés respectivement *octogone*, *décagone*, *dodécagone*, *pentédécagone*.

On nomme *diagonale* d'un polygone toute droite joignant deux sommets non consécutifs.

22. Parmi les triangles, on distingue en particulier:

Le triangle *isoscèle*. On appelle ainsi un triangle qui a deux côtés égaux. Le sommet commun à ces deux côtés égaux est nommé plus spécialement le *sommet* du triangle et le côté opposé est dit la *base ;*

Le triangle *équilatéral*, ou triangle qui a ses trois côtés égaux ;

Le triangle *rectangle*, ou triangle qui a un angle droit. Le côté opposé à l'angle droit se nomme *hypoténuse*.

On nomme *hauteur* d'un triangle la perpendiculaire abaissée d'un sommet sur le côté opposé ; *médiane*, la droite qui joint un sommet au milieu du côté opposé.

23. Théorème. — *Dans tout triangle isoscèle, les angles opposés aux côtés égaux sont égaux.*

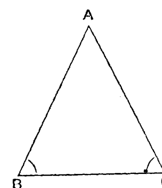


Fig. 20.

Soit le triangle isoscèle ABC (*fig.* 20). Retournons l'angle BAC sur lui-même (**10**) de manière que AB prenne la direction AC et réciproquement.

Puisque AB et BC sont égaux, le point B viendra prendre la place du point C et inversement. L'angle $\widehat{ABC}$ sera donc venu en $\widehat{ACB}$, de sorte que ces deux angles sont égaux.

C. Q. F. D.

Réciproque. — *Si dans un triangle deux angles sont égaux, le triangle est isoscèle.*

Soit le triangle ABC, dans lequel on a $\widehat{B} = \widehat{C}$. Déplaçons ce triangle de manière que le côté BC se trouve retourné sur lui-même (**6**), le point B venant en C et inversement. Puisque l'angle $\widehat{ABC}$ est égal à $\widehat{ACB}$, le côté BA viendra prendre la direction CA, et inversement. Le point A, intersection de BA et de CA, gardera donc sa position primitive, et le côté AB prendra bien la place de AC.

C. Q. F. D.

Corollaire. — *Un triangle équilatéral est équiangle (c'est-à-dire a tous ses angles égaux), et réciproquement.*

Théorème. — *Dans tout triangle isoscèle, la bissectrice de l'angle*

au sommet est perpendiculaire à la base et la divise en deux parties égales.

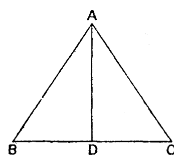


FIG. 21.

Dans le triangle isoscèle ABC (*fig.* 21), soit AD la bissectrice de l'angle $\widehat{A}$.

Dans le retournement de l'angle $\widehat{BAC}$ sur lui-même, cette bissectrice ne change pas de place, et il en est de même du point D où elle coupe la base. DB étant venu sur DC et l'angle $\widehat{ADB}$ sur $\widehat{ADC}$, on a bien : DB = DC ; $\widehat{ADB} = \widehat{ADC}$.

C. Q. F. D.

REMARQUE. — Dans un triangle quelconque ABC, on peut considérer quatre droites :

1° La bissectrice de l'angle $\widehat{A}$;

2° La hauteur issue de A ;

3° La médiane issue du même point ;

4° La perpendiculaire sur le milieu de BC.

En général, ces quatre droites sont distinctes les unes des autres (Voir exercice 17). Le théorème précédent exprime que, dans un triangle isoscèle, elles sont toutes confondues en une seule, *qui est* (**19**) *un axe de symétrie du triangle.*

Ce théorème peut donc aussi bien s'énoncer : *la hauteur d'un triangle isoscèle est en même temps bissectrice et médiane ;* ou encore, *la médiane d'un triangle isoscèle est en même temps hauteur et bissectrice ; la perpendiculaire au milieu de la base passe par le sommet et est bissectrice de l'angle au sommet.*

Corollaire. — *Dans un triangle isoscèle, les hauteurs issues des extrémités de la base sont égales entre elles ; il en est de même des médianes issues de ces mêmes sommets, des bissectrices des angles en ces points*, etc. Car ces droites sont symétriques deux à deux.

24. Les propositions suivantes, connues sous le nom de **cas d'égalité des triangles**, expriment des conditions nécessaires et suffisantes pour que deux triangles soient égaux.

1er Cas. — *Deux triangles sont égaux, s'ils ont un côté égal compris entre deux angles égaux chacun à chacun.*

Soient les deux triangles ABC, A'B'C' (*fig.* 22) dans lesquels on a $BC = B'C'$; $\widehat{B} = \widehat{B'}$; $\widehat{C} = \widehat{C'}$.

Transportons l'angle $\widehat{B'}$ sur son égal $\widehat{B}$, le côté B'A' prenant la direction BA et B'C' la direction BC. Comme $B'C' = BC$, le point C' vient en C et, puisque $\widehat{C'} = \widehat{C}$, le côté C'A' prend la direction CA. Dès lors le point A', intersection de B'A' et de C'A', vient nécessairement à l'intersection de BA et de CA, c'est-à-dire en A. La coïncidence est donc établie.

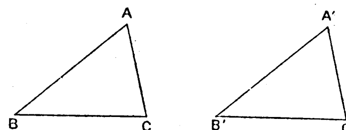


Fig. 22.

2e Cas. — *Deux triangles sont égaux, s'ils ont un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun.*

Soient les deux triangles ABC, A'B'C', dans lesquels on a $\widehat{A} = \widehat{A'}$; $AB = A'B'$; $AC = A'C'$ (*fig.* 22).

Transportons l'angle A' sur son égal A, le côté A'B' prenant la direction AB, et le côté A'C' la direction AC. Comme $A'B' = AB$, le point B' viendra en B ; et de même, le point C' viendra en C. B'C' coïncide donc avec BC et la superposition est complète.

3e Cas. — *Deux triangles sont égaux, s'ils ont les trois côtés égaux chacun à chacun.*

Soient les deux triangles ABC, A'B'C' qui ont les trois côtés égaux chacun à chacun. Déplaçons le deuxième triangle de manière à mettre B'C' sur son égal BC, les deux triangles étant du même côté de BC. Soit BCA_1 la nouvelle position du triangle B'C'A'. Je dis que le point A_1 coïncide avec le point A. Cela est tout d'abord évident si la droite B'A' a pris la direction BA, ou la droite C'A', la direction CA. Si d'ailleurs il n'en était pas ainsi, nous aurions formé deux triangles isoscèles BAA_1, CAA_1 (*fig.* 23) et la perpendiculaire au milieu de AA_1 devrait passer par les points B et C (**23**, corollaire), autrement dit se confondre avec la droite BC : ce qui est inadmissible, puisque BC, qui laisse les points A et A_1 du même côté, ne peut passer par le milieu de AA_1. Les points A et A_1 ne peuvent donc être que confondus, et les deux triangles coïncident.

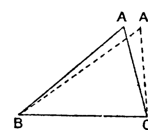


Fig. 23.

Remarque I. — On voit que, pour établir que le point A_1 coïncide avec le point A, nous avons cherché ce qui arriverait si ces deux points étaient distincts; et arrivant, dans ce cas, à une conséquence manifestement fausse, nous en avons conclu qu'il ne pouvait se présenter. Ce mode de raisonnement, dit démonstration *par l'absurde*, est souvent utile.

Remarque II. — Dans un triangle, il y a six éléments principaux à considérer, savoir : les trois angles et les trois côtés. On voit qu'il suffit d'avoir constaté, dans deux triangles, l'égalité de trois de ces éléments (convenablement choisis) pour pouvoir affirmer l'égalité des deux triangles et, en particulier, l'égalité des trois éléments restants.

Remarque III. — Deux triangles (ou en général deux polygones) égaux peuvent différer par les sens de rotation (**20**). Dans ce cas, ils ne peuvent être superposés que par un mouvement extérieur au plan. Au contraire, si les sens de rotation sont les mêmes, les deux polygones peuvent être amenés à coïncider par un simple glissement dans le plan, ainsi que nous aurons l'occasion de le constater.

25. On nomme *angle extérieur* d'un polygone convexe, l'angle formé par un côté et le prolongement du suivant.

Théorème. — *Tout angle extérieur d'un triangle est plus grand que chacun des angles intérieurs non adjacents.*

Soit le triangle ABC dans lequel je construis l'angle extérieur $\widehat{B'AC}$ (*fig.* 24).

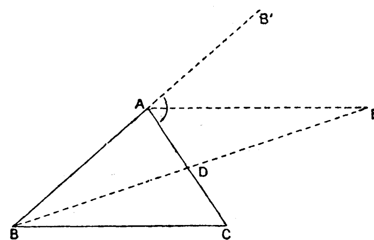


Fig. 24.

Je dis que cet angle est plus grand que l'angle intérieur C, par exemple. Pour le démontrer, je mène la médiane BD, que je prolonge d'une longueur DE égale à elle-même. Le point E étant dans l'angle $\widehat{B'AC}$, celui-ci sera supérieur à l'angle $\widehat{EAC}$. Or, ce dernier n'est autre que l'angle C; car les deux triangles DAE, DBC sont égaux comme ayant un angle égal compris entre côtés égaux chacun à chacun, savoir : les angles en D égaux comme opposés par le sommet;

AD = DC et BD = DE par construction. Donc l'angle extérieur B'AC est plus grand que l'angle intérieur C.

C. Q. F. D.

L'angle extérieur $\widehat{B'AC}$ est le supplément de l'angle intérieur A. L'angle C étant plus petit que le supplément de A, la somme C + A est moindre que deux droits. Notre théorème peut donc s'énoncer : *La somme de deux angles d'un triangle est moindre que deux droits*. En particulier, *un triangle ne peut avoir plus d'un angle droit ou obtus.*

Théorème. — *Dans tout triangle, à un plus grand côté est opposé un plus grand angle.*

Soit, dans le triangle ABC, AB > AC. Je vais démontrer que l'on a C > B. A cet effet, je prends sur AB la longueur AD = AC (*fig.* 25). D'après l'hypothèse, la droite DC est à l'intérieur de l'angle $\widehat{C}$ primitif et, par suite, l'angle $\widehat{ACD}$ est plus petit que cet angle C. Mais dans le triangle isoscèle ACD, l'angle $\widehat{ACD}$ est égal à l'angle $\widehat{ADC}$, lequel est supérieur à l'angle B d'après le théorème précédent appliqué au triangle DCB. Le théorème est donc démontré.

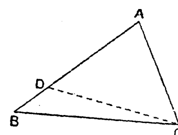


Fig. 25.

Réciproquement, *à un plus grand angle correspond* (1) *un plus grand côté.*

Cet énoncé est manifestement équivalent au précédent.

26. Théorème. — *Dans tout triangle, un côté quelconque est plus petit que la somme des deux autres.*

Dans le triangle ABC, prolongeons AB d'une longueur AD = AC (*fig.* 26). Il s'agit de démontrer que BC < BD (2).

Or, en joignant CD, on voit que l'angle $\widehat{D}$, égal à l'angle $\widehat{ACD}$ (**23**), est par conséquent plus petit que l'angle $\widehat{BCD}$.

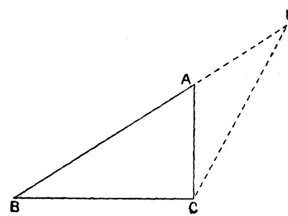


Fig. 26.

L'inégalité annoncée résulte donc du théorème précédent, appliqué au triangle BCD.

(1) Le côté *correspondant* à un angle d'un triangle est le côté opposé.
(2) Le théorème est évident si BC n'est pas le plus grand côté du triangle.

Corollaires. — I. *Dans tout triangle, un côté quelconque est plus grand que la différence des deux autres.*

Car l'inégalité $BC < AB + AC$ donne, en retranchant AC aux deux membres :

$$BC - AC < AB$$

II. *Quels que soient les trois points A, B, C, chacune des distances BC, CA, AB est au plus égale à la somme des deux autres et au moins égale à leur différence*, l'égalité pouvant avoir lieu si les trois points sont en ligne droite.

Théorème. — *La ligne droite est plus courte que toute ligne brisée terminée aux mêmes extrémités.*

Si la ligne brisée n'a que deux côtés, ce théorème revient au précédent.

Soit maintenant une ligne brisée de trois côtés ABCD (*fig.* 27). Joignons BD. On aura

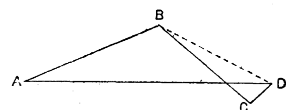


Fig. 27.

$$AD < AB + BD$$

et, comme

$$BD < BC + CD,$$
$$AD < AB + BD < AB + BC + CD$$

Le théorème est ainsi démontré pour une ligne brisée de trois côtés; comme le même raisonnement servirait à passer successivement à des lignes brisées de 4, de 5 côtés, etc., le théorème est vrai, quelque grand que soit le nombre des côtés.

27. On nomme *périmètre* d'un polygone ou d'une ligne brisée quelconque, la somme de ses côtés.

Théorème. — *Le périmètre d'une ligne brisée convexe est moindre que celui de toute ligne brisée enveloppante terminée aux mêmes extrémités.*

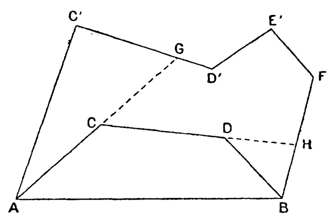


Fig. 28.

Soient la ligne convexe ACDB et la ligne enveloppante AC'D'E'F'B (*fig.* 28). Prolongeons les côtés AC, CD dans le même sens ACDB, c'est-à-dire le côté AC au delà du point C, le côté CD au delà du point D. Ces prolonge-

ments coupent la ligne enveloppante en G et H respectivement.

Le chemin ACDB est plus court que ACHB; car ils ont une partie commune ACD, et la partie restante BD du premier est plus courte que la partie restante DHB du deuxième. A son tour, le chemin ACHB est inférieur à AGD′E′F′B; car, en enlevant les parties communes AC, HB, il reste la droite CH, plus petite que la ligne brisée CGD′E′F′H. Enfin de même, AGD′E′F′B est moindre que AC′D′E′F′B, puisque AG est moindre que AC′G. On a donc bien

$$ACDB < ACHB < ACGD'E'F'B < AC'GD'E'F'B$$

C. Q. F. D.

Corollaire. — *Le périmètre d'un polygone convexe est moindre que le périmètre d'une ligne polygonale fermée qui l'enveloppe de toutes parts.*

Soient (*fig.* 29) le polygone convexe ABCDE et la ligne polygonale A′B′C′D′E′F′G′A′ qui l'enveloppe de toutes parts. Prolongeons le côté AB, dans les deux sens, jusqu'à rencontre en M, N avec la ligne enveloppante : nous voyons que la ligne AEDCB est moindre que AMB′A′G′NB (théorème précédent), de sorte que le polygone AEDCBA a un périmètre moindre que le polygone NMB′A′G′N. Or celui-ci, à son tour, est moins long que la ligne enveloppante donnée, car la partie MB′A′G′N est commune et MN < MC′D′E′F′N.

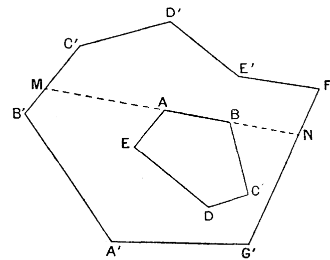


Fig. 29.

28. Théorème. — *Si deux triangles ont un angle inégal compris entre côtés égaux chacun à chacun, les troisièmes côtés sont inégaux et au plus grand angle est opposé le plus grand côté.*

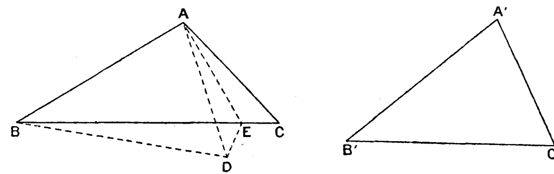


Fig. 30.

Soient les triangles ABC, A′B′C′ dans lesquels AB = A′B′, AC = A′C′, A > A′ (*fig.* 30). Je veux démontrer que BC est plus grand que B′C′.

Transportons le triangle A′B′C′ sur le triangle ABC de manière à faire coïncider les deux côtés égaux A′B′ et AB. L'angle A′ étant plus petit que A, le côté A′C′ prend une position AD intérieure à l'angle BAC. Menons la bissectrice AE de l'angle DAC : cette droite, également intérieure à l'angle BAC et laissant, par suite, les points B et C de côtés différents, doit donc couper le côté BC en un certain point E situé entre B et C. Si nous joignons DE, nous voyons que les deux triangles ACE et ADE, égaux comme ayant un angle égal (les angles en A) compris entre deux côtés égaux chacun à chacun (AE commun ; $AC = A'C' = AD$), donnent $DE = EC$. Dès lors l'inégalité $BD < BE + ED$, fournie par le triangle BDE, nous donne bien

$$BD < BE + EC$$

ou

$$BD < BC$$

C. Q. F. D.

Réciproquement. — *Si, dans deux triangles, deux côtés sont égaux et le troisième inégal, les angles opposés aux côtés égaux sont inégaux, et au plus grand côté est opposé le plus grand angle.*

Cet énoncé est équivalent au précédent.

EXERCICES

5. Démontrer qu'un triangle est isoscèle :

1° Si la bissectrice est en même temps hauteur;

2° Si la médiane est en même temps hauteur;

3° Si la bissectrice est en même temps médiane.

6. Sur le côté Ox d'un angle, on porte deux longueurs OA, OB et, sur le côté Ox', deux longueurs OA′, OB′ respectivement égales aux premières ; on joint en croix AB′, BA′. Démontrer que le point I, où se coupent ces deux droites, appartient à la bissectrice de l'angle donné.

7. Si deux côtés d'un triangle sont inégaux, la médiane qu'ils comprennent fait avec le plus petit des deux un angle plus grand qu'avec l'autre.

8. Si l'on joint un point pris à l'intérieur d'un triangle aux trois sommets, la somme des lignes de jonction est plus grande que le demi-périmètre du triangle et plus petite que le périmètre entier.

8 *bis*. Si l'on joint un point pris dans le plan d'un polygone aux différents sommets, la somme des lignes de jonction est plus grande que le demi-périmètre du polygone.

9. La somme des diagonales d'un quadrilatère est comprise entre le demi-périmètre et le périmètre entier.

10. Le point d'intersection des diagonales d'un quadrilatère est le point du plan dont les distances aux quatre sommets ont la plus petite somme possible.

11. La médiane d'un triangle est plus petite que la demi-somme des côtés qui la comprennent et plus grande que la différence entre cette demi-somme et la moitié du troisième côté.

12. La somme des médianes d'un triangle est plus grande que le demi-périmètre et plus petite que le périmètre entier.

13. Trouver, sur une droite donnée, un point tel que la somme de ses distances à deux points donnés soit la plus petite possible. — Distinguer deux cas, suivant que les deux points sont ou non de part et d'autre de la droite.

On ramènera le second cas au premier (symétrie d'une partie de la figure par rapport à la droite donnée).

14. (Problème du billard.) Étant donnés une droite xy et deux points A, B du même côté de cette droite, trouver sur cette droite un point M tel que l'angle $\widehat{AMx}$ soit égal à l'angle $\widehat{BMy}$.

On trouve le même point que dans l'exercice précédent.

15. Trouver, sur une droite donnée, un point tel que la différence de ses distances à deux points donnés soit la plus grande possible.

On distinguera deux cas, suivant que les deux points sont ou non du même côté de la droite.

CHAPITRE III

PERPENDICULAIRES ET OBLIQUES

29. Théorème. — *Si, d'un point pris hors d'une droite, on mène à cette droite la perpendiculaire et diverses obliques :*

1° *La perpendiculaire est plus courte que toute oblique ;*

2° *Deux obliques dont les pieds s'écartent également du pied de la perpendiculaire sont égales ;*

3° *De deux obliques, la plus longue est celle dont le pied s'écarte le plus du pied de la perpendiculaire.*

1° Soient la perpendiculaire OH et l'oblique OA menées du point O à la droite xy (*fig.* 31). Prolongeons OH d'un longueur HO′ égale à elle-même ; le point O′ est le symétrique de O par rapport à xy, de sorte que la droite O′A est égale à OA comme étant sa symétrique. Si alors nous considérons le triangle OO′A, dans lequel on a

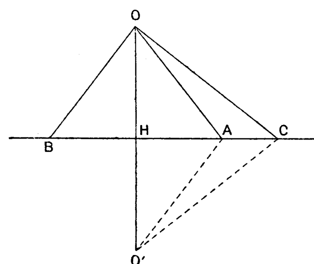


Fig. 31.

$$OO' < OA + O'A,$$

nous voyons qu'on peut remplacer OO′ par 2OH et OA + O′A par 2OA. Il vient donc

$$2OH < 2OA, \text{ ou } OH < OA.$$

2° Soient les deux obliques OA et OB telles que HA = HB. Ces deux obliques seront égales comme symétriques par rapport à OH.

3° Soient l'oblique OA et l'oblique OC telles que HC > HA (*fig.* 31). Supposons d'abord que les deux points A et C soient du même côté

de H : alors le point A est à l'intérieur du triangle OO'C. On a donc (**27**)

$$OA + O'A < OC + O'C.$$

Mais, ainsi qu'on l'a vu plus haut, OA est égal à O'A et OC à O'C. On a donc, en divisant par 2, comme précédemment,

$$OA < OC.$$

Si l'on avait considéré une oblique OB moins écartée que OC, mais de côté différent du point H, il suffirait de reporter dans le sens HC une longueur HA = HB : l'oblique OA serait égale à OB (2°) et plus petite que OC, d'après ce que nous venons de voir.

30. Réciproquement. — *Si deux obliques sont égales, leurs pieds sont également écartés du pied de la perpendiculaire*, sans quoi elles seraient inégales ; et, *si deux obliques sont inégales, celle qui est la plus longue est plus écartée que l'autre.*

31. On appelle *distance d'un point à une droite* la longueur de la perpendiculaire abaissée du point sur la droite. Le théorème précédent montre qu'en effet cette perpendiculaire est le chemin le plus court pour aller du point à la droite.

32. Théorème. — 1° *Tout point situé sur la perpendiculaire au milieu d'une droite est également distant des deux extrémités de cette droite ; 2° tout point non situé sur cette perpendiculaire est inégalement distant des deux extrémités de la droite.*

1° Soit M un point situé sur la perpendiculaire au milieu O de la droite AB (*fig.* 32). Les droites MA, MB sont égales comme obliques également écartées du pied de la perpendiculaire MO ;

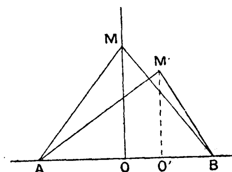


Fig. 32.

2° Soit M' un point non situé sur la perpendiculaire au milieu de AB : situé, par exemple, du côté de cette perpendiculaire où se trouve le point B. Il en sera de même du point O', pied de la perpendiculaire abaissée du point M' sur AB (sans quoi cette perpendiculaire rencontrerait la précédente et, du point de rencontre, on pourrait abaisser deux perpendiculaires sur AB).

On aura donc O'A > O'B, et il en résultera (**29**)

$$M'A > M'B.$$

Remarque I. — On aurait pu démontrer cette seconde partie d'une autre façon en établissant la proposition équivalente : *Tout point équidistant de* A *et de* B *est situé sur la perpendiculaire au milieu de* AB, laquelle résulte de la réciproque du n° **30** (deux obliques égales ont leurs pieds également écartés du pied de la perpendiculaire) ; ou encore des propriétés du triangle isoscèle (**23**, Remarque). Toutefois, il faut remarquer que notre manière de procéder a l'avantage de faire connaître laquelle des deux distances est la plus grande, dans le cas où elles sont inégales.

Remarque II. — La proposition que nous venons d'énoncer : *Tout point équidistant de* A *et de* B *est sur la perpendiculaire au milieu de* AB, est la réciproque de la première partie du théorème précédent. Nous avons donc ici deux modes de démonstration d'une réciproque, tous deux différents de celui que nous avons rencontré au n° **15**. Le premier consiste à reprendre en sens inverse le raisonnement primitif. C'est ce que nous avons fait dans la remarque précédente. Le raisonnement primitif (théor. préc., 1°) partait de l'hypothèse que le point M était sur la perpendiculaire au milieu de AB, ou que MA et MB étaient également écartées du pied de la perpendiculaire, et en déduisait qu'elles étaient égales. Cette fois, on est parti de ce que le point M était également distant de A et de B, ou que les deux obliques étaient égales, et on en a conclu qu'elles étaient également écartées.

Le second mode de démonstration de la réciproque consiste à démontrer ce que l'on nomme la *proposition contraire*. On appelle ainsi une proposition où l'hypothèse est le contraire de l'hypothèse primitive et la conclusion le contraire de la conclusion primitive. Ainsi la deuxième partie du théorème précédent est la proposition contraire de la première et équivaut à sa réciproque.

33. Définition. — On appelle *lieu géométrique* d'un point qui peut occuper une infinité de positions, la figure formée par l'ensemble de ces positions.

D'après cette définition, le théorème précédent peut s'énoncer : *le lieu géométrique des points également distants de deux points*

donnés est la perpendiculaire au milieu de la droite qui joint ces deux points ; car la figure formée par les points équidistants de A et de B est bien la perpendiculaire au milieu de AB.

On remarquera que, pour établir ce fait, il faut démontrer, comme nous l'avons fait : 1° que tout point de la perpendiculaire satisfait à la condition donnée ; 2° que tout point satisfaisant à cette condition est sur la perpendiculaire ; ou, ce qui revient au même, que tout point non situé sur la perpendiculaire ne satisfait pas à la condition. La nécessité d'une double démonstration de cette espèce se présentera de même dans tous les problèmes relatifs aux lieux géométriques.

EXERCICES

16. Si deux triangles rectangles sont tels que les côtés de l'angle droit du premier sont respectivement plus petits que ceux du second, l'hypoténuse du premier est plus petite que l'hypoténuse du second.

17. Si les angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ d'un triangle ABC sont aigus et les côtés AB, AC inégaux, l'ordre dans lequel se suivent les lignes issues du sommet A est : plus grand côté ; médiane ; bissectrice ; hauteur ; plus petit côté.

18. La médiane d'un triangle non isoscèle est plus grande que la bissectrice de l'angle formé par les côtés qui la comprennent, limitée au troisième côté.

CHAPITRE IV

CAS D'ÉGALITÉ DES TRIANGLES RECTANGLES. — PROPRIÉTÉ DE LA BISSECTRICE D'UN ANGLE

34. Cas d'égalité des triangles rectangles.

Les triangles rectangles présentent, bien entendu, les cas d'égalité des triangles quelconques. Par exemple, deux triangles rectangles sont égaux quand ils ont les côtés de l'angle droit égaux chacun à chacun (2e cas d'égalité des triangles quelconques).

Outre les cas d'égalité précédents, les triangles rectangles en présentent deux autres qui leur sont particuliers.

Premier cas d'égalité. — *Deux triangles rectangles sont égaux quand ils ont l'hypoténuse égale et un angle aigu égal.*

Soient (*fig.* 33) les deux triangles rectangles ABC, A′B′C′, dans lesquels on a BC = B′C′, B = B′. Transportons le second triangle sur le premier, de manière à faire coïncider les angles égaux B, B′. Alors B′C′ prendra la direction de BC et, comme ces deux lignes sont égales, le point C′ viendra en C. B′A′ prend d'ailleurs la direction BA, et par conséquent C′A′ doit venir suivant la perpendiculaire abaissée du point C sur BA, c'est-à-dire suivant CA.

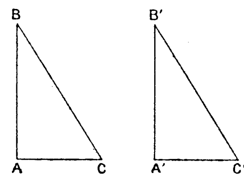


Fig. 33.

Deuxième cas d'égalité. — *Deux triangles rectangles sont égaux quand ils ont l'hypoténuse égale et un côté de l'angle droit égal.*

Soient les deux triangles ABC, A′B′C′, dans lesquels on a BC = B′C′; AB = A′B′. Transportons le second triangle sur le premier, de manière à faire coïncider les côtés égaux AB, A′B′. Le côté A′C′ prendra la direction AC. Nous aurons alors, du point B à la droite AC, deux obliques, à savoir BC et la nouvelle position de B′C′,

lesquelles seront égales d'après l'hypothèse, et, par suite (**30**), également écartées du pied de la perpendiculaire. On a donc A'C' = AC, d'où résulte l'égalité des deux triangles.

35. Théorème. — *Quand deux triangles rectangles ont l'hypoténuse égale et un angle aigu inégal, les côtés opposés aux angles inégaux sont inégaux, et au plus grand angle est opposé le plus grand côté.*

Soient (*fig.* 34) les triangles ABC, A'B'C', dans lesquels on a BC = B'C' ; B > B'. Je dis que l'on a aussi AC > A'C'.

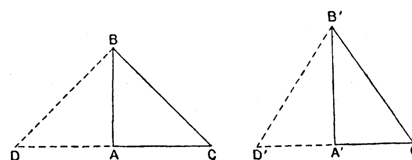


Fig. 34.

Pour le voir, nous prolongerons AC d'une longueur égale à lui-même suivant AD, et de même A'C' suivant A'D'. On aura tout d'abord (**29**) BD = BC = B'C' = B'D'. De plus, dans le triangle isoscèle BDC, la médiane BA sera aussi bissectrice, de sorte que l'angle $\widehat{DBC}$ sera double de l'angle $\hat{B}$ primitif. De même l'angle $\widehat{D'B'C'}$ sera double de l'angle $\hat{B}'$ primitif, de sorte que l'on aura $\widehat{DBC} > \widehat{D'B'C'}$.

Les deux triangles DBC, D'B'C' auront alors un angle inégal compris entre côtés égaux chacun à chacun, d'ou résulte DC > D'C' et, par suite, AC > A'C'.

36. Théorème. — *La bissectrice d'un angle est le lieu des points situés à l'intérieur de l'angle et équidistants de ses côtés.*

La démonstration, ainsi qu'il a été expliqué précédemment (**33**), se compose de deux parties :

1° *Tout point situé sur la bissectrice est également distant des deux côtés.*

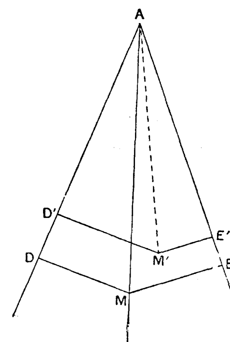


Fig. 35.

Soient (*fig.* 35) l'angle BAC et le point M situé sur la bissectrice de cet angle. Si du point M nous abaissons sur les côtés les perpendiculaires MD, ME, les deux triangles rectangles AMD, AME seront égaux comme ayant l'hypoténuse égale et un angle aigu (en A) égal par hypothèse.

Donc les deux perpendiculaires MD, ME seront égales.

2° *Tout point situé à l'intérieur de l'angle, mais non sur la bissectrice, est inégalement distant des deux côtés de l'angle.*

Soit le point M′ situé, par exemple, entre la bissectrice et le côté AC. Alors l'angle BAM′ sera plus grand que l'angle M′AC. Si donc nous abaissons sur AB et AC les perpendiculaires M′D′, M′E′, les deux triangles rectangles AM′D′, AM′E′ auront l'hypoténuse commune et les angles en A inégaux ; M′D′ sera donc (**35**) plus grand que M′E′.

De même que pour le théorème du n° **32**, nous aurions pu démontrer, au lieu de la proposition contraire donnée en 2°, la réciproque : *Tout point situé à l'intérieur de l'angle et également distant de ses côtés est sur la bissectrice.* Pour cela, reprenant en sens inverse le raisonnement primitif, on aurait considéré un point M (*fig.* 35) supposé également distant de AB et de AC, et on aurait appliqué aux deux triangles rectangles AMD, AME, dans lesquels l'hypoténuse est commune et MD = ME, le second cas d'égalité (**34**). On aurait ainsi démontré l'égalité des angles en A, d'où résulte que AM est la bissectrice. Mais on n'aurait pas su ainsi laquelle des deux distances est la plus grande, lorsqu'elles sont inégales.

Corollaire. — *Le lieu des points également distants de deux droites qui se coupent se compose des deux bissectrices* (**17**) *des angles formés par ces droites.*

EXERCICES

19. Démontrer qu'un triangle est isoscèle si deux hauteurs sont égales.

20. Plus généralement, dans tout triangle, à un plus grand côté correspond une plus petite hauteur.

CHAPITRE V

DROITES PARALLÈLES

37. Quand deux droites sont coupées par une même sécante (*fig.* 36), cette dernière forme, avec les deux premières, huit angles numérotés sur la figure et dont les relations mutuelles sont exprimées par les dénominations suivantes :

Deux angles tels que $\widehat{3}$ et $\widehat{5}$ (*fig.* 36), regardant intérieurement par rapport aux deux droites et de côtés différents de la sécante, sont dits *alternes-internes;*

Deux angles tels que $\widehat{3}$ et $\widehat{6}$, situés intérieurement par rapport aux deux droites, mais du même côté de la sécante, sont dits *intérieurs du même côté ;*

Deux angles tels que $\widehat{6}$ et $\widehat{2}$, situés du même côté de la sécante et regardant l'un intérieurement, l'autre extérieurement, sont dits *correspondants.*

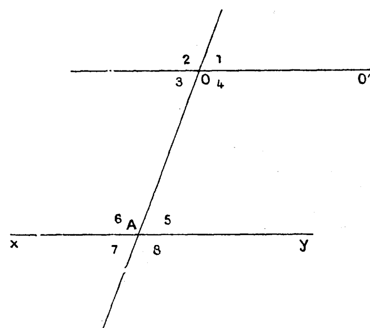


Fig. 36.

38. Définition. — On nomme droites *parallèles* deux droites situées dans le même plan et qui, si loin qu'on les prolonge dans les deux sens, ne se rencontrent pas.

Théorème. — *Deux droites étant coupées par une même sécante, ces deux droites sont parallèles :*

1° *Si les angles intérieurs du même côté sont supplémentaires* (1) ;

2° *Si les angles alternes-internes sont égaux ;*

(1) Si les angles $\widehat{3}$ et $\widehat{6}$ (*fig.* 36) sont supplémentaires, il en est de même des angles $\widehat{4}$ et $\widehat{5}$, car la somme des quatre angles est égale à quatre droits.

3° *Si les angles correspondants sont égaux.*

1° Si les deux droites se rencontraient, soit d'un côté, soit de l'autre de la sécante, elles formeraient un triangle dans lequel (**25**) la somme des deux angles intérieurs du même côté serait plus petite que deux droits.

Les deux autres cas se ramènent au premier :

2° Si les angles alternes-internes $\widehat{3}$ et $\widehat{5}$ sont égaux, cela revient à dire que l'angle $\widehat{3}$ est égal au supplément de l'angle $\widehat{6}$, ou que les angles intérieurs du même côté sont supplémentaires;

3° Si les angles correspondants $\widehat{6}$ et $\widehat{2}$ sont égaux, les angles $\widehat{3}$ et $\widehat{6}$ sont encore supplémentaires, car l'angle $\widehat{3}$ est le supplément de l'angle $\widehat{2}$.

Ce théorème sert à démontrer que deux droites sont parallèles.

Corollaire. — En particulier, *deux droites, perpendiculaires à une même troisième dans un même plan, sont parallèles.*

39. Théorème. — *Par un point pris hors d'une droite, on peut mener une parallèle à cette droite.*

Soient le point O et la droite xy (*fig.* 36). On joindra le point O à un point quelconque A de xy, et la droite OO′, qui fait avec OA un angle tel que $\widehat{AOO'} + \widehat{OAy} = 2$ droits, est parallèle à xy.

40. La construction précédente pouvant être effectuée d'une infinité de façons, puisque le point A peut être pris arbitrairement sur xy, il semble qu'elle donne une infinité de parallèles distinctes.

Il n'en est rien, d'après l'axiome suivant :

Axiome [1]. — *Par un point pris hors d'une droite, on ne peut mener qu'une parallèle à cette droite.*

Corollaires. — I. *Deux droites distinctes parallèles à une même troisième sont parallèles entre elles;* car si elles avaient un point commun, il passerait par ce point deux parallèles à la troisième droite.

II. *Si deux droites sont parallèles, toute droite qui coupe la*

(1) Cet axiome est connu sous le nom de *Postulatum d'Euclide*. En réalité, il doit être considéré comme faisant partie de la définition des notions fondamentales. (Voir la note B à la fin du volume.)

première coupe la seconde, sans quoi deux parallèles à la seconde droite se couperaient [1].

41. Le théorème du n° **38** admet une réciproque que nous allons démontrer :

Réciproque. — *Quand deux parallèles sont coupées par une même sécante :*

1° *Les angles intérieurs du même côté sont supplémentaires ;*

2° *Les angles alternes-internes sont égaux ;*

3° *Les angles correspondants sont égaux.*

La démonstration est la même pour les trois parties.

Soient deux parallèles AB, CD coupées par la sécante EFx (*fig.* 37). Je dis, par exemple, que les angles correspondants $\widehat{xEB}$, $\widehat{xFD}$ sont égaux. En effet, nous pouvons faire en E, avec la droite EF, un angle $\widehat{xEB'}$ égal à l'angle $\widehat{xFD}$. La droite EB′ sera dès lors parallèle à CD et, par suite, se confondra avec EB.

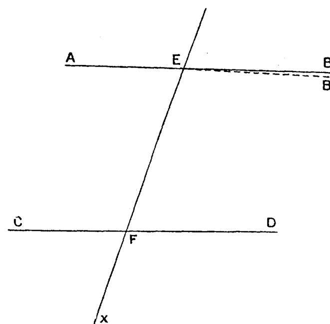


Fig. 37.

Corollaires. — I. *Si deux droites font, avec une même sécante, deux angles intérieurs du même côté dont la somme diffère de deux angles droits, elles ne sont pas parallèles et se rencontrent du côté de la sécante où la somme des angles est moindre que deux droits.*

II. *Quand deux droites sont parallèles, toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.* Car elle coupera nécessairement cette autre (**40**, Cor. II) et l'angle formé sera droit, d'après le théorème que nous venons de démontrer.

Remarque. — Les angles correspondants égaux $\widehat{xEB}$, $\widehat{xFD}$ ont le même sens de rotation. Car un observateur placé dans le sens Ex verra les demi-droites EB, FD toutes deux à droite ou toutes deux à gauche.

(1) Nous avons ici un nouvel exemple de démonstration par l'absurde (Voir **24**, Remarque I).

Les deux directions parallèles EB, FD, situées ainsi du même côté par rapport à une sécante quelconque, sont dites *parallèles et de même sens*.

42. D'après le théorème du n° **38** et sa réciproque, la définition précédemment donnée des parallèles revient exactement à celle-ci: *Deux droites sont parallèles lorsqu'elles forment avec une sécante quelconque des angles correspondants égaux (ou des angles alternes-internes égaux, ou des angles intérieurs du même côté supplémentaires)*.

C'est cette dernière définition, équivalente à la première, qu'il convient en général d'utiliser de préférence à celle-ci.

A la locution : *droites parallèles*, on substitue souvent celle de : *droites de même direction*, dont le sens est clair d'après les propositions précédentes.

Remarque. — D'après ce que nous venons de dire, *deux droites qui coïncident doivent être regardées comme un cas particulier de deux droites parallèles*.

43. Théorème. — *Deux angles qui ont leurs côtés parallèles chacun à chacun sont égaux ou supplémentaires : égaux, si les côtés sont tous les deux de même sens ou tous les deux de sens contraire; supplémentaires, si les côtés sont l'un de même sens, l'autre de sens contraire.*

En premier lieu, deux angles qui ont un côté commun et les seconds côtés parallèles et de même sens (*fig.* 38) sont égaux comme correspondants. Deux angles qui ont leurs côtés parallèles et de même sens sont donc égaux, car, avec un côté de l'un et un côté de l'autre, on forme un troisième angle égal à chacun des deux premiers.

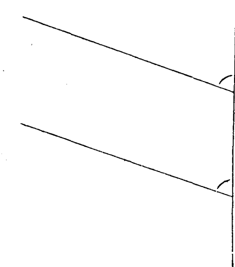


Fig. 38.

Si les deux angles ont un côté de même sens et un côté de sens contraire, en prolongeant dans l'un d'eux le côté qui est de sens contraire, on forme un angle supplémentaire du premier et égal au second.

Si les deux côtés sont de sens contraire, on prolongera les deux côtés du premier angle. On forme ainsi un angle égal au premier comme opposé par le sommet et, d'autre part, égal au second.

Remarque. — Deux angles correspondants et, par suite, aussi deux angles qui ont leurs côtés parallèles et de même sens ayant le même sens de rotation, on peut encore dire : *Deux angles qui ont leurs côtés parallèles sont égaux ou supplémentaires, suivant qu'ils ont ou non le même sens de rotation.*

Théorème. — *Deux angles qui ont leurs côtés perpendiculaires chacun à chacun sont égaux ou supplémentaires, suivant qu'ils ont ou non le même sens de rotation.*

Soient les deux angles $\widehat{BAC}$, $\widehat{B'A'C'}$ (*fig.* 39), tels que A'B' et A'C' soient respectivement perpendiculaires à AB et AC. Menons la perpendiculaire AB_1 à la droite AB, et retournons ensuite sur lui-même l'angle $\widehat{B_1AC}$: le côté AB_1 venant sur AC, la droite AB, perpendiculaire à AB_1, prendra une position AC_1 perpendiculaire à AC. Nous avons donc un angle $\widehat{B_1AC_1}$ égal à l'angle donné $\widehat{BAC}$ avec le même sens (car il dérive par retournement de l'angle $\widehat{CAB}$, qui est de sens contraire à $\widehat{BAC}$) et dont les côtés, respectivement perpendiculaires à ceux du premier, sont par suite parallèles à ceux de B'A'C'. Les angles $\widehat{BAC}$, $\widehat{B'A'C'}$ étant égaux ou supplémentaires suivant qu'ils ont ou non le même sens de rotation, il en est de même des angles donnés.

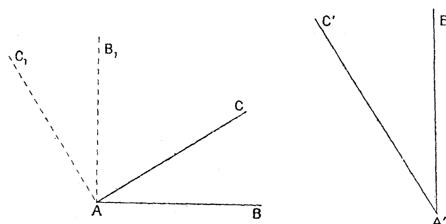


Fig. 39.

44. Théorème. — *La somme des angles d'un triangle est égale à deux droits.*

Dans le triangle ABC (*fig.* 40), prolongeons BC suivant Cx et menons CE parallèle à AB. Nous formons en C trois angles (numérotés de 1 à 3 sur la figure) dont la somme est égale à deux droits. Or ces trois angles sont respectivement égaux aux trois angles du triangle, savoir :

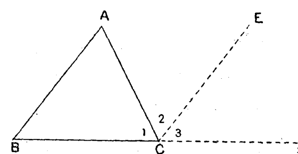


Fig. 40.

l'angle $\widehat{1}$ qui est l'angle C du triangle; l'angle $\widehat{2}$, égal à l'angle $\widehat{A}$ (ce sont des angles alternes-internes formés par la sécante AC avec les parallèles AB, CE); l'angle $\widehat{3}$, égal à l'angle B (ce sont des angles correspondants formés par la sécante BC avec les mêmes parallèles).

Corollaires. — I. *L'angle extérieur d'un triangle est égal à la somme des angles intérieurs non adjacents.*

II. *Les angles aigus d'un triangle rectangle sont complémentaires.*

III. *Si deux triangles ont deux angles égaux chacun à chacun, les troisièmes angles sont égaux.*

44 *bis*. **Théorème.** — *La somme des angles intérieurs d'un polygone convexe* (1) *est égale à autant de fois deux droits qu'il y a de côtés moins deux.*

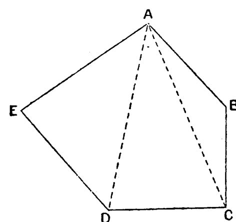


Fig. 41.

Soit le polygone ABCDE (*fig.* 41). En joignant le point A aux autres sommets par des diagonales, nous décomposerons ce polygone en triangles. Il y a autant de triangles qu'il y a de côtés moins deux; car, le point A étant pris pour sommet commun de ces triangles, tous les côtés du polygone servent successivement de base, excepté les deux qui aboutissent en A. Or la somme des angles de tous ces triangles donne la somme des angles du polygone. Le théorème est donc démontré.

Si n est le nombre des côtés du polygone, la somme des angles est de $2(n-2)$ ou $2n-4$ angles droits.

Corollaire. — *La somme des angles extérieurs d'un polygone convexe, formés en prolongeant tous les côtés dans le même sens, est égale à quatre droits.*

Car la somme de chaque angle extérieur et de l'angle intérieur correspondant donne deux droits. En additionnant les résultats obtenus aux n sommets, on obtiendra donc $2n$ droits, dont $2n-4$ sont donnés par la somme des angles intérieurs. La somme des angles extérieurs fournit par conséquent les 4 droits qui manquent.

(1) Le théorème se démontre également, avec un peu plus de difficulté, pour un polygone concave, moyennant une définition convenable des angles d'un tel polygone.

EXERCICES

PARALLÈLES

21. Dans un triangle ABC, si, par le point d'intersection des bissectrices des angles B et C, on mène une parallèle MN à BC, limitée en M et N aux côtés AB, AC, cette parallèle est égale à la somme des segments BM, CN.

Que devient cet énoncé lorsqu'on mène la parallèle à BC par le point de rencontre des bissectrices des angles extérieurs en B et C; — par le point de rencontre de la bissectrice de l'angle en B avec la bissectrice de l'angle extérieur en C?

SOMMES DES ANGLES DES POLYGONES

22. Démontrer le théorème du n° **44** *bis* en décomposant le polygone en triangles par des droites issues d'un même point intérieur.

23. Étant donné un triangle quelconque ABC, on mène, du point A au côté BC, deux droites AD, AE dont la première fait avec AB un angle égal à l'angle $\widehat{C}$, pendant que la seconde fait avec AC un angle égal à l'angle $\widehat{B}$. Démontrer que le triangle ADE est isoscèle.

24. Dans tout triangle ABC :

1° La bissectrice de l'angle A fait avec la hauteur issue de A un angle égal à la demi-différence des angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$;

2° Les bissectrices des angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ font entre elles un angle égal à $1^{dr} + \frac{\widehat{A}}{2}$;

3° Les bissectrices des angles extérieurs en $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ font entre elles un angle égal à $1^{dr} - \frac{\widehat{A}}{2}$.

25. Dans un quadrilatère convexe :

1° Les bissectrices de deux angles consécutifs font entre elles un angle égal à la demi-somme des deux autres angles;

2° Les bissectrices de deux angles opposés font entre elles un angle supplémentaire de la demi-différence des deux autres angles.

CHAPITRE VI

DES PARALLÉLOGRAMMES. — DES TRANSLATIONS

45. Parmi les quadrilatères, on considère en particulier les *trapèzes* et les *parallélogrammes*.

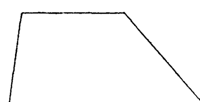


Fig. 42.

On nomme *trapèze* (*fig.* 42) un quadrilatère dont deux côtés sont parallèles. Ces côtés parallèles sont dits les *bases* du trapèze.

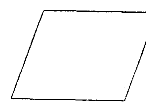


Fig. 43.

On nomme *parallélogramme* (*fig.* 43) un quadrilatère dont les côtés sont parallèles deux à deux.

Théorème. — *Dans un parallélogramme, les angles opposés sont égaux, les angles adjacents à un même côté supplémentaires.*

En effet, dans le parallélogramme ABCD (*fig.* 44), les angles A et B adjacents au même côté AB sont des angles intérieurs du même côté par rapport aux parallèles AD, BC, coupées par la sécante AB : ils sont donc supplémentaires. Quant aux angles opposés A, C, ils sont égaux comme ayant leurs côtés parallèles et de sens contraires.

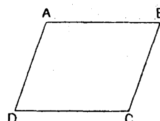


Fig. 44.

Remarque. — On voit qu'il suffit de connaître un angle d'un parallélogramme pour les connaître tous.

Réciproque. — *Si, dans un quadrilatère, les angles opposés sont égaux, le quadrilatère est un parallélogramme.*

En effet, la somme des angles de tout quadrilatère est égale à quatre droits (**44** *bis*). Mais si on a $A = C$, $B = D$, la somme des quatre angles $A + B + C + D$ pourra s'écrire $2A + 2B$. On aura donc $A + B = 2 \text{ dr}$, et les droites AD, BC seront parallèles, comme formant avec AB deux angles intérieurs du même côté supplé-

mentaires. On démontrerait de même que AB est parallèle à CD.

46. Théorème. — *Dans tout parallélogramme, les côtés opposés sont égaux.*

Dans le parallélogramme ABCD (*fig.* 45), menons la diagonale AC. Elle décompose le parallélogramme en deux triangles ABC, CDA, lesquels sont égaux comme ayant le côté AC commun compris entre deux angles égaux chacun à chacun : $A_1 = C_1$ comme alternes-internes formés par les parallèles AB, CD; $A_2 = C_2$ comme alternes-internes formés par les parallèles AD, BC.

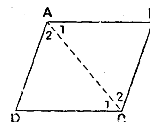


Fig. 45.

Ces triangles égaux donnent bien AB = CD; AD = BC.

Dans ce théorème, l'hypothèse se compose de deux parties : 1° deux côtés opposés sont parallèles; 2° les deux autres sont également parallèles. De même, la conclusion se compose de deux parties : 1° deux côtés opposés sont égaux; 2° les deux autres sont aussi égaux.

Comme, dans la proposition réciproque, on peut former la conclusion, soit totalement, soit partiellement avec l'hypothèse primitive et *vice versa*, le théorème précédent a deux réciproques.

Réciproques. — *Un quadrilatère est un parallélogramme :*

1° *Si les côtés opposés sont égaux;*

2° *Si deux côtés opposés sont égaux et parallèles.*

1° Dans le quadrilatère ABCD (*fig.* 45), supposons AB = CD avec AD = BC. Menons encore la diagonale AC. Les triangles ABC, CDA seront égaux comme ayant les trois côtés égaux chacun à chacun. Les angles A_1, C_1 seront donc égaux, et comme ces angles occupent par rapport à la sécante AC la position d'alternes-internes, les droites AB, CD qui les forment sont parallèles. De même l'égalité des angles A_2, C_2 prouve le parallélisme des droites AD, BC.

2° Supposons maintenant AB = CD avec AB parallèle à CD. Les deux triangles ABC, CDA seront encore égaux, parce qu'ils auront un angle égal ($A_1 = C_1$ comme alternes-internes) compris entre côtés égaux chacun à chacun : AC commun et AB = CD. De l'égalité des deux triangles résultent l'égalité des angles A_2, C_2 et le parallélisme des côtés AD, BC.

47. Théorème. — *Dans un parallélogramme, les diagonales se coupent mutuellement en parties égales.*

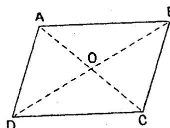


FIG. 46.

Dans le parallélogramme ABCD (*fig.* 46), menons les diagonales AC, BD qui se coupent en O. Les deux triangles ABO, CDO sont égaux comme ayant leurs angles égaux chacun à chacun et le côté AB = CD (théor. précéd.). On a donc AO = CO, BO = DO.

C. Q. F. D.

Réciproque. — *Un quadrilatère est un parallélogramme si les diagonales se coupent mutuellement en parties égales.*

Supposons, en effet, dans le quadrilatère ABCD (*fig.* 46), AO = CO, BO = DO. Les deux triangles ABO, CDO seront égaux comme ayant un angle égal (les angles en O égaux comme opposés par le sommet) compris entre côtés égaux chacun à chacun. Leurs angles en A et C seront donc égaux et, par suite, AB sera parallèle à CD. L'égalité des triangles ADO, BCO prouvera de même que AD est parallèle à BC.

REMARQUE. — Nous avons démontré les réciproques des nos **46** et **47** en reprenant en sens inverse les raisonnements primitifs, comme il a été expliqué au no **32**, Remarque II.

48. On appelle *rectangle* un quadrilatère dont les angles sont égaux, et par conséquent tous droits. Un rectangle est un parallélogramme, puisque les angles opposés sont égaux.

On appelle *losange* un quadrilatère dont les quatre côtés sont égaux. Un losange est un parallélogramme, puisque les côtés opposés sont égaux.

Donc, dans un rectangle comme dans un losange, les diagonales se coupent en leur milieu commun.

Théorème. — *Dans un rectangle, les diagonales sont égales.*

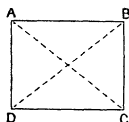


FIG. 47.

Dans le rectangle ABCD (*fig.* 47), les diagonales AC, BD sont égales; car les triangles ACD, BCD, ayant l'angle $\widehat{ADC} = \widehat{DCB}$ comme droits, le côté DC commun et AD = BC comme côtés opposés d'un parallélogramme, sont égaux.

Corollaire. — *Dans un triangle rectangle, la médiane issue du sommet de l'angle droit est la moitié de l'hypoténuse.*

Car en menant, par les extrémités de l'hypoténuse, des parallèles aux côtés de l'angle droit, on forme un rectangle dont la médiane considérée est la demi-diagonale.

Réciproque. — *Tout parallélogramme dans lequel les diagonales sont égales, est un rectangle.*

Soit le parallélogramme ABCD (*fig.* 47), dans lequel les diagonales sont égales. On a AD = BC : par conséquent les triangles ADC, BCD sont égaux, comme ayant leurs trois côtés égaux chacun à chacun. Les angles ADC, CDB sont donc égaux et, comme ils sont supplémentaires, ils sont tous deux droits, d'où résulte que le parallélogramme est un rectangle.

Corollaire. — *Un triangle dans lequel la médiane est la moitié du côté correspondant, est rectangle.*

Théorème. — *Dans un losange, les diagonales sont perpendiculaires entre elles et bissectrices des angles.*

Si le quadrilatère ABCD (*fig.* 48) est un losange, le triangle ABD est isoscèle. La diagonale AD, étant médiane de ce triangle, est en même temps hauteur et bissectrice.

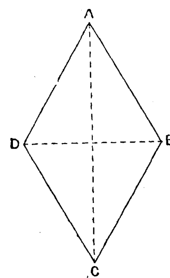


Fig. 48.

Réciproque. — *Tout parallélogramme dans lequel les diagonales sont perpendiculaires, est un losange.*

En effet, chaque sommet sera équidistant des deux sommets adjacents, comme étant sur la perpendiculaire au milieu de la diagonale qui joint ces deux sommets.

49. Un *carré* est un quadrilatère dans lequel tous les côtés sont égaux et tous les angles droits.

Un carré est donc à la fois un losange et un rectangle, de sorte que les diagonales sont égales, perpendiculaires et se coupent en leurs milieux.

Réciproquement, tout quadrilatère dans lequel les diagonales sont égales, perpendiculaires et se coupent en leurs milieux, est un carré.

Deux carrés de même côté sont égaux.

50. Translations.

Lemme. — *Deux figures* F, F′ *sont égales, avec le même sens de rotation, si leurs points se correspondent de telle façon qu'en prenant trois points* A, B, C *de l'une et les points correspondants* A′, B′, C′ *de l'autre, les triangles ainsi formés soient toujours égaux avec le même sens de rotation, quel que soit le point* C.

En effet, soient les deux points A, B de la figure F et leurs homologues (¹) A′, B′. AB devra évidemment être égal à A′B′. Transportons la seconde figure sur la première de façon à faire coïncider ces deux lignes égales. Je dis qu'alors les deux figures coïncident complètement. Soient en effet un troisième point C de la première figure et son homologue C′. Les deux triangles ABC, A′B′C′ étant égaux, l'angle $\widehat{B'A'C'}$ est égal à $\widehat{BAC}$ et de même sens. Donc, quand on fait coïncider A′B′ avec AB, la droite A′C′ devra venir dans la direction AC. Comme d'ailleurs $A'C' = AC$, le point C′ vient en C. La même démonstration s'appliquant à tous les points de nos deux figures, la coïncidence est complète.

Remarques. — I. Nous venons de trouver pour l'égalité de deux figures une condition suffisante; cette condition est d'ailleurs évidemment nécessaire.

II. Du raisonnement précédent résulte :

Pour faire coïncider entre elles deux figures égales et de même sens, il suffit de faire coïncider deux points de l'une des figures avec leurs homologues respectifs.

51. Théorème. — *Si, par tous les points d'une figure, on mène des droites égales, parallèles et de même sens, les extrémités de ces droites forment une figure égale à la première.*

Soient d'abord deux points A, B de la première figure, auxquels correspondent les points A′, B′ de la seconde. Les droites AA′, BB′ étant parallèles et égales, le quadrilatère ABA′B′ est un parallélogramme. Donc A′B′ est égal et parallèle à AB, avec le même sens. Ainsi les droites qui joignent les points homologues sont égales, parallèles et de même sens.

Dès lors à trois points quelconques correspondent trois points formant un triangle égal, et comme les angles de ces triangles ont

(1) On nomme ainsi les points qui se correspondent dans les deux figures.

leurs côtés parallèles et de même sens, les sens de rotation sont les mêmes. Les deux figures sont donc égales.

L'opération par laquelle on passe de la première figure à la seconde a reçu le nom de *translation*. On voit qu'une translation est déterminée quand on se donne en grandeur, direction et sens le segment, tel que AA', qui va d'un point à son homologue. Aussi désigne-t-on une translation par les lettres d'un tel segment : on dit, par exemple, la translation AA'.

Corollaires. — I. *Si, par tous les points d'une droite, on mène des droites égales, parallèles et de même sens, le lieu des extrémités de ces droites est une parallèle à la droite primitive.*

En particulier, *le lieu des points situés d'un même côté d'une droite et à une distance donnée de cette droite, est une parallèle à la droite.*

II. *Deux parallèles sont partout équidistantes.*

On peut donc parler de la *distance* de deux parallèles.

III. *Le lieu des points équidistants de deux droites parallèles est une troisième droite parallèle aux premières.*

EXERCICES

PARALLÉLOGRAMMES

26. Un quadrilatère qui a deux côtés égaux et les deux autres parallèles est, soit un parallélogramme, soit un trapèze (dit trapèze *isoscèle*) qui a un axe de symétrie.

27. Toute droite menée par le point d'intersection des diagonales d'un parallélogramme est divisée par ce point et deux côtés opposés en deux parties égales.

En raison de cette circonstance, le point d'intersection des diagonales d'un parallélogramme est dit le *centre* de ce polygone.

28. Deux parallélogrammes *inscrits* l'un dans l'autre, c'est-à-dire tels que les quatre sommets du premier soient respectivement sur les quatre côtés du second, ont même centre.

29. Un angle d'un triangle est aigu, droit ou obtus, suivant que le côté opposé est inférieur, égal ou supérieur à la médiane correspondante.

30. Si, dans un triangle rectangle, l'un des angles aigus est double de l'autre, l'un des côtés de l'angle droit est la moitié de l'hypoténuse.

TRANSLATIONS

31. Lieu des points tels que la somme ou la différence de leurs distances à deux droites données soit égale à une longueur donnée.

32. On donne deux parallèles et deux points A et B extérieurs à ces parallèles et situés de part et d'autre : quelle est la ligne brisée la plus courte joignant ces deux points, de manière que la portion comprise entre les deux parallèles ait une direction donnée ?

CHAPITRE VII

DROITES CONCOURANTES DANS UN TRIANGLE

52. Théorème. — *Dans tout triangle, les perpendiculaires élevées sur les milieux des côtés se coupent en un même point.*

Soit le triangle ABC (*fig.* 49). Les perpendiculaires aux milieux des côtés AB, AC, n'étant pas parallèles (sans quoi AB et AC se confondraient) se coupent en un certain point O. Il s'agit de montrer que ce point appartient aussi à la perpendiculaire au milieu de BC.

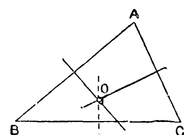


Fig. 49.

Le point O, étant sur la perpendiculaire au milieu de AB, est également distant de A et de B; de même, étant sur la perpendiculaire au milieu de AC, il est également distant de A et de C. Donc il est également distant de B et de C et, comme tel, appartient à la perpendiculaire au milieu de BC.

53. Théorème. — *Dans tout triangle, les trois hauteurs se coupent en un même point.*

Soit le triangle ABC (*fig.* 50). Menons par le point A une parallèle à BC, par B une parallèle à AC, par C une parallèle à AB. Nous formons ainsi un nouveau triangle A′B′C′. Je vais démontrer que les hauteurs du triangle ABC sont les perpendiculaires aux milieux des côtés du nouveau triangle, d'où résultera bien qu'elles sont concourantes.

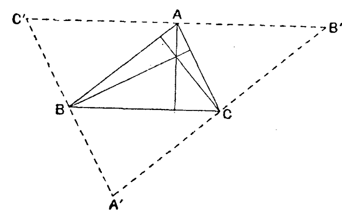


Fig. 50.

Le parallélogramme ABCB′ nous donne BC = AB′; le parallélogramme ABCC′ nous donne de même BC = AC′, de sorte que le point A est bien le milieu de B′C′. La hauteur AD du triangle ABC

passera donc bien par le milieu de B′C′ et, de plus, sera perpendiculaire à B′C′, puisqu'elle est perpendiculaire à sa parallèle BC.

Comme le même raisonnement peut se répéter pour les deux autres hauteurs, le théorème est démontré.

54. Théorème. — *Dans tout triangle : 1° les bissectrices des trois angles se coupent en un même point; 2° la bissectrice d'un angle et les bissectrices des angles extérieurs non adjacents se coupent en un même point.*

1° Dans le triangle ABC (*fig.* 51), menons les bissectrices des angles B et C : elles se coupent en un point O intérieur au triangle. Ce point, appartenant à la bissectrice de l'angle B, est également distant de AB et de BC. De même, appartenant à la bissectrice de l'angle C, il est également distant de AC et de BC. Il est donc également distant de AB et de AC, et, comme il est intérieur à l'angle A, il est sur la bissectrice de cette angle.

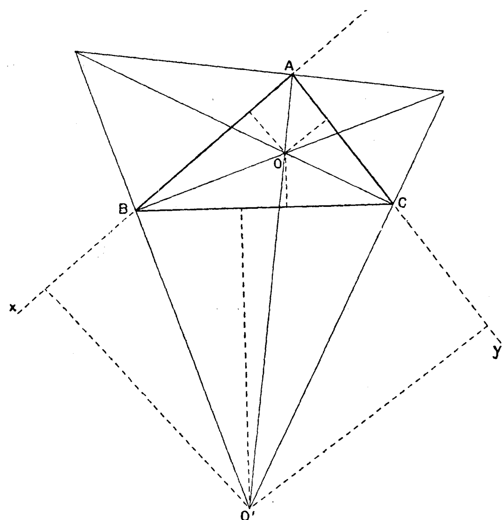


Fig. 51.

2° Les angles extérieurs $\widehat{CBx}$, $\widehat{BCy}$ ayant une somme moindre que quatre droits, leurs moitiés auront une somme moindre que deux droits. Les bissectrices de ces deux angles se couperont donc (**41**, corollaire) en un point O′ intérieur à l'angle A. Ce point O′ sera, comme le précédent, équidistant des trois côtés du triangle. Il appartiendra donc à la bissectrice de A.

55. Théorème. — *La droite, qui joint les milieux de deux côtés d'un triangle, est parallèle au troisième côté et égale à sa moitié.*

Dans le triangle ABC (*fig.* 52), soient D le milieu de AB, E le milieu de AC. Prolongeons la droite DE, au delà du point E, d'une longueur égale à elle-même jusqu'en F. Le quadrilatère ADCF sera un parallélogramme (**47**) et, par suite, CF sera égal et parallèle à DA, ou, ce qui revient au même, à BD. Alors le quadrilatère BDCF est à son tour un parallélogramme. Donc : 1° DE est parallèle à BC ; 2° DE, moitié de DF, est égal à la moitié de BC.

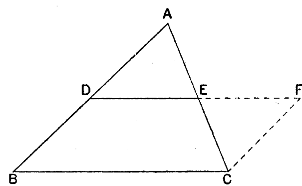


Fig. 52.

55 *bis*. **Théorème.** — *Les trois médianes d'un triangle se coupent en un même point, situé au tiers de chacune d'elles à partir de la base correspondante.*

Soient d'abord, dans le triangle ABC, deux médianes BE, CF (*fig.* 53) : je dis que leur point d'intersection G est au tiers de chacune d'elles. Pour le voir, appelons M et N les milieux de BG et de CG. La droite MN, joignant les milieux de deux côtés dans le triangle BCG, est parallèle à BC et égale à sa moitié. Mais EF est aussi parallèle à BC et égale à sa moitié. EFMN est alors un parallélogramme dans lequel les diagonales se coupent en leurs milieux. On a donc $EG = GM = MB$ et $FG = GN = NC$.

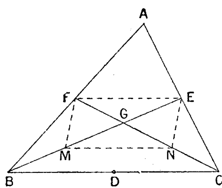


Fig. 53.

Ainsi la médiane BE passe par le point situé au tiers de CF. Mais le même raisonnement prouverait que la troisième médiane AD passe aussi par ce même point. Le théorème est donc démontré.

Remarque. — Le point de concours des médianes est aussi nommé *centre de gravité* du triangle. La raison de cette dénomination est donnée en mécanique.

EXERCICES

33. Joindre un point donné au point de rencontre de deux droites données, mais qui se coupent en dehors des limites du dessin (n° **53**).

34. Dans tout trapèze, les milieux des côtés non parallèles et les milieux des

diagonales sont sur une même droite, parallèle aux bases. La distance entre les milieux des côtés non parallèles est égale à la demi-somme des bases; la bistance entre les milieux des diagonales, à la demi-différence de ces bases.

35. Si, des points A, B et du milieu C de AB, on abaisse des perpendiculaires sur une droite quelconque, la perpendiculaire abaissée du point C est égale à la demi-somme des deux premières ou à leur demi-différence, suivant que celles-ci sont de même sens ou de sens contraire.

36. Les milieux des côtés d'un quadrilatère quelconque sont les sommets d'un parallélogramme. Les côtés de ce parallélogramme sont respectivement parallèles aux diagonales du quadrilatère donné et égaux aux moitiés de ces diagonales. Son centre est au milieu de la droite qui joint les milieux des diagonales du quadrilatère donné.

37. Démontrer que les médianes d'un triangle ABC sont concourantes, en prolongeant la médiane CF (*fig.* 53) au delà du point F, d'une longueur égale à FG.

38. Étant données trois droites concourantes en un même point O (toutes distinctes entre elles) et un point A sur l'une d'elles, montrer qu'il existe :

1° Un triangle ayant un sommet en A et les droites données pour hauteurs (un cas d'exception);

2° Un triangle ayant un sommet en A et les droites données pour médianes;

3° Un triangle ayant un sommet en A et les droites données pour bissectrices de ses angles intérieurs ou extérieurs (un cas d'exception);

4° Un triangle ayant le milieu d'un côté en A et les droites données pour perpendiculaires aux milieux des côtés (ramener à 1°).

PROBLÈMES

PROPOSÉS SUR LE PREMIER LIVRE

39. Dans tout triangle, à tout plus grand côté correspond une plus petite médiane.

40. On admet qu'une bille de billard qui vient frapper une bande rectiligne se réfléchit de manière que les deux droites suivies avant et après le choc soient également inclinées sur la bande.

Cela posé, soient $D_1, D_2, \ldots D_n$, n droites d'un plan; A, B, deux points situés du même côté de chacune de ces droites. Dans quelle direction faut-il lancer une bille du point A pour qu'elle aille passer au point B après s'être réfléchie successivement sur les droites données ?

Démontrer que le chemin ainsi suivi par la bille est la ligne brisée la plus courte qui aille du point A au point B en ayant ses sommets successifs sur les droites données[1].

(1) Lorsqu'il n'y a qu'une seule droite, le problème se réduit à celui qui fait l'objet des exercices 13-14.

Ce premier problème ayant été résolu, on cherchera un moyen qui permette de déduire, de la solution ainsi trouvée pour le cas d'une seule droite, celle qui est relative au cas où il y a deux droites; puis de passer de ce cas à celui où il y a trois droites, et ainsi de suite.

Cas particulier. — Les droites données sont les quatre côtés d'un rectangle, pris dans leur ordre naturel; le point B coïncide avec le point A, qui est d'ailleurs pris à l'intérieur du rectangle. — Montrer, dans ce cas, que le chemin parcouru par la bille est égal à la somme des diagonales du rectangle.

41. Dans un triangle isoscèle, la somme des distances d'un point de la base aux deux autres côtés est constante. — Que devient cet énoncé lorsque l'on considère un point pris sur un des prolongements de la base ?

Dans un triangle équilatéral, la somme des distances d'un point intérieur aux trois côtés est constante. — Que devient cet énonce lorsque le point considéré devient extérieur ?

42. Dans un triangle ABC, si, par le milieu D de BC, on mène une perpendiculaire à la bissectrice de l'angle A, cette droite détermine sur chacun des côtés AB et AC deux segments égaux respectivement à $\frac{AB + AC}{2}$ et $\frac{AB - AC}{2}$.

43. Soient ABCD, DEFG deux carrés placés côte à côte, de manière que les côtés DC, DE aient même direction et que les côtés AD, DG soient en prolongement l'un de l'autre. On prend, sur AD et sur le prolongement de DC, deux segments AH, CK égaux à DG. Démontrer que le quadrilatère HBKF est aussi un carré.

44. Les bissectrices des angles d'un parallélogramme forment un rectangle. Les bissectrices des angles extérieurs forment également un rectangle. Les diagonales de ces deux rectangles sont situées sur les deux mêmes droites, parallèles aux côtés du parallélogramme donné. Ces diagonales sont égales, l'une à la demi-différence, l'autre à la demi-somme des côtés du parallélogramme.

45. Sur les côtés AB, AC d'un triangle et extérieurement à ce triangle, on construit les carrés ABDE, ACFG (D et F étant les sommets opposés à A). Prouver :

1° Que EG est perpendiculaire à la médiane issue de F et double de cette médiane;

2° Que le quatrième sommet I du parallélogramme dont les trois autres sommets sont E, A, G (E et G étant opposés) est situé sur la hauteur issue de A, dans le triangle donné;

3° Que CD, BF sont respectivement égaux et perpendiculaires à BI, CI et se coupent aussi sur la hauteur issue de A.

46. On donne un angle droit $\widehat{AOB}$ et deux droites rectangulaires issues d'un point P, la première coupant les côtés de l'angle donné en A, B, la seconde coupant ces mêmes côtés en C, D. Démontrer que les perpendiculaires menées des points D, O, C sur la droite OP interceptent sur AB des segments respectivement égaux à AP, PB, mais disposés en sens inverse.

LIVRE II

DU CERCLE

CHAPITRE PREMIER

INTERSECTION D'UNE DROITE ET D'UN CERCLE

56. On nomme *circonférence* (*fig.* 54) le lieu des points d'un plan situés à une distance donnée d'un point donné de ce plan. Ce point est le *centre* de la circonférence. La droite qui joint le centre à un point quelconque de la circonférence est un *rayon*. Par définition, tous les rayons sont égaux entre eux.

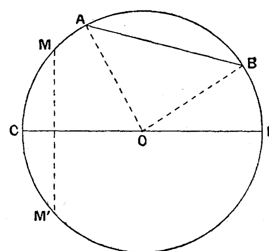


Fig. 54.

D'après la définition précédente, quand nous voudrons exprimer qu'un point est situé sur la circonférence, nous exprimerons que sa distance au centre est égale au rayon.

Une circonférence est une ligne qui sépare deux régions du plan : l'une comprenant les points dont la distance au centre est moindre que le rayon; l'autre, les points pour lesquels cette distance est supérieure au rayon.

Les points de la première région sont *intérieurs* à la circonférence; cette région se nomme le *cercle;* les points de la deuxième région sont *extérieurs* à la circonférence. On ne peut passer par un chemin

continu d'une de ces régions à l'autre sans traverser la circonférence.

On nomme *arc* (*fig.* 54) une portion de circonférence. La droite qui joint les extrémités d'un arc est la *corde* de cet arc. Il faut remarquer qu'une corde donnée correspond toujours à deux arcs différents, situés de côtés différents de la corde.

On nomme *diamètre* (*fig.* 54) une corde qui passe par le centre. Un diamètre vaut deux rayons.

57. Une circonférence est déterminée, d'après ce qui précède, quand on donne son centre et son rayon.

Une circonférence est déterminée quand on donne un diamètre, car le centre est le milieu du diamètre donné.

Théorème. — *Par trois points non en ligne droite on peut faire passer une circonférence, et une seule.*

Autrement dit, *une circonférence est déterminée par trois points non en ligne droite.*

Soient en effet A, B, C (*fig.* 49) trois points non en ligne droite. Nous avons démontré (**52**) que les perpendiculaires aux milieux des droites BC, CA, AB concouraient en un même point O, équidistant de A, B, C. La circonférence décrite de O comme centre, avec OA comme rayon, passe par les trois points donnés. C'est d'ailleurs la seule qui réponde à cette condition, car le centre d'une circonférence qui passerait par A, B, C devrait nécessairement appartenir aux trois perpendiculaires dont nous venons de parler.

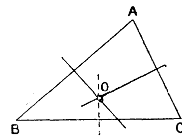


Fig. 49.

Corollaire. — On voit qu'*une circonférence ne peut avoir deux centres différents*, ni par suite deux rayons inégaux.

58. Théorème. — *Une droite ne peut rencontrer la circonférence en plus de deux points.*

Si la distance du centre à la droite est plus grande que le rayon, la droite ne coupe pas la circonférence.

Si cette distance est plus petite que le rayon, la droite coupe la circonférence en deux points.

Enfin, si la distance est égale au rayon, la droite a un seul point commun avec la circonférence.

On dit, dans ce dernier cas, qu'elle est *tangente.*

1° Du centre O (*fig.* 55) abaissons sur la droite D la perpendiculaire OH. Les points d'intersection de la droite et du cercle, étant tous équidistants de O, sont par là même équidistants de H. Or une même longueur ne peut être portée à partir du point H sur la droite D de plus de deux façons différentes.

2° Si, la distance, OH est supérieure au rayon, il en est de même, *à fortiori* (**29**), de la distance du centre à un point quelconque de la droite; donc tous les points de la droite sont extérieurs au cercle.

3° Si au contraire OH (*fig.* 55) est plus petit que le rayon, le point H est intérieur au cercle, mais, des deux côtés de H, il existe des points de la droite extérieurs au cercle. Il suffit, pour en obtenir, de porter sur D, à partir de H, deux longueurs HP, HP′, égales au rayon : les distances OP, OP′ seront nécessairement supérieures à ce même rayon. Il y aura donc deux points d'intersection, l'un entre H et P, l'autre entre H et P′ ; ce seront d'ailleurs les seuls (1°).

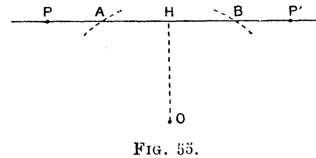


Fig. 55.

4° Si enfin OH est égal au rayon (*fig.* 56) le point H est commun à la droite et au cercle; mais, de même qu'en 2°, on voit que tout autre point de la droite est extérieur au cercle.

Corollaire. — *Par un point pris sur la circonférence on peut lui mener une tangente, et une seule, savoir la perpendiculaire au rayon qui aboutit en ce point.*

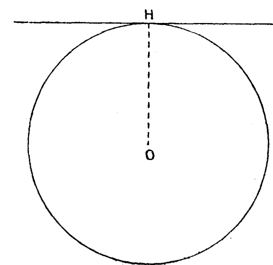


Fig. 56.

59. La définition précédente de la tangente n'est pas celle qu'il convient d'adopter pour la tangente à une courbe quelconque.

Définition.—On nomme *tangente* à une courbe quelconque (*fig.* 57) en un point M de cette courbe la position limite vers laquelle tend la droite MM′ lorsque le point M′, décrivant la courbe, se rapproche indéfiniment de M. Autrement dit [1] :

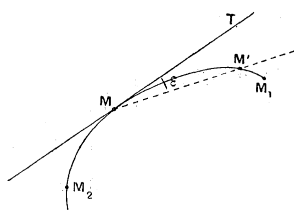


Fig. 57.

La droite MT sera dite la *tangente* en M si, pour n'importe quel angle donné ε, on peut assigner, des deux côtés du point M, deux arcs MM_1, MM_2 tels que, pour toute position du point M′ prise sur l'un de ces arcs, la droite MM′ fasse avec MT ou son prolongement un angle moindre que ε [2].

Nous allons faire voir que cette définition, pour le cas du cercle, revient à celle que nous avons donnée plus haut.

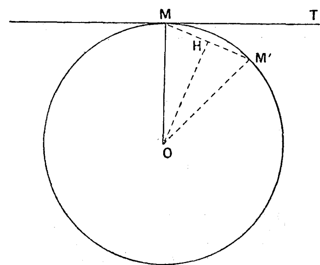


Fig. 56 *bis*.

Menons au point M du cercle O la perpendiculaire MT au rayon OM et, sur la corde MM′ (*fig.* 56 *bis*), abaissons du centre la perpendiculaire OH. Cette droite, hauteur du triangle isoscèle OMM′, est en même temps bissectrice de l'angle en O. L'angle $\widehat{TMM'}$ égal à $\widehat{MOH}$ (puisqu'ils ont leurs côtés perpendiculaires) est donc la moitié de $\widehat{MOM'}$. Or ce dernier peut devenir plus petit que tout angle donné, si l'on rend le point M′ suffisamment voisin de M.

60. On nomme *normale* à une courbe, en un point, la perpendiculaire à la tangente en ce point. La normale au cercle en un point n'est, par suite, autre chose que le rayon qui aboutit en ce point.

Sur un cercle donné quelconque, il existe deux points (et deux seulement) tels que les normales en ces points passent par un point donné P du plan (différent du centre) : ce sont les extrémités du diamètre qui passe par le point P.

(1) Voir la définition du mot *limite* dans les *Leçons d'Arithmétique* de M. Tannery (Paris, libr. Armand Colin, 1894), chap. VII, n° 237, et chap. XII.

(2) On démontre, comme en Arithmétique (*Leçons* de M. Tannery, n° 239) que, si cette droite MT existe, elle est unique.

60 *bis.* On nomme *angle de deux courbes*, en un de leurs points d'intersection, l'angle formé par leurs tangentes en ce point (*fig.* 57 *bis*). L'angle de deux cercles qui se coupent est donc égal à l'angle des rayons qui aboutissent au point commun, ou à son supplément.

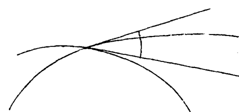


Fig. 57 *bis*.

EXERCICES

47. Par tous les points d'une circonférence, on mène des droites égales et parallèles à une même droite donnée. Quel est le lieu des extrémités de ces droites ?

48. Lieu des milieux des droites qui joignent un point fixe aux différents points d'une circonférence.

49. Soient AB un diamètre d'une circonférence, O, C un point pris sur le prolongement de ce diamètre, CDE une sécante issue du point C et qui coupe le cercle en D, E. Si la partie extérieure CD est égale au rayon, l'angle $\widehat{EOB}$ est triple de l'angle $\widehat{DOA}$.

CHAPITRE II

PROPRIÉTÉS DU DIAMÈTRE

61. Théorème. — *Sur une circonférence quelconque, le point le plus rapproché et le point le plus éloigné d'un point quelconque* P *du plan sont les pieds des normales qui passent par* P.

Si A est celui de ces deux points qui est situé sur la demi-droite OP, B celui qui est sur la demi-droite opposée (*fig.* 58 et 58 *bis*), la distance PA est la différence de OP et du rayon, et la distance PB, la somme des mêmes longueurs. Un point quelconque M de la circonférence est donc à une distance du point P supérieure à PA et inférieure à PB, comme troisième côté du triangle OPM.

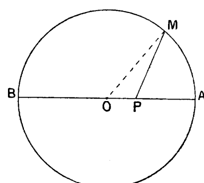


Fig. 58.

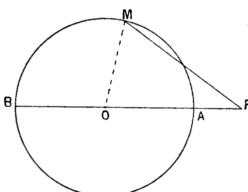


Fig. 58 *bis*.

La distance PM *va constamment en croissant quand le point* M *décrit la circonférence en allant de* A *vers* B, car elle est opposée, dans le triangle OPM, à un angle qui va en croissant et qui est compris entre deux côtés constants.

Corollaire. — *Le diamètre est la plus grande corde du cercle.*

Si, en effet, on fait coïncider le point P avec le point A, on voit que la corde PM est plus petite que le diamètre PB.

62. Théorème. — *Tout diamètre partage la circonférence en deux parties égales. Il est, pour cette figure et pour le cercle, un axe de symétrie.*

Soit (*fig.* 54) un diamètre CD qui divise la circonférence en deux arcs.

Un point quelconque M de l'arc supérieur a pour symétrique un point de l'arc inférieur; car à une distance OM égale au rayon correspond, par symétrie, une distance OM' égale à la première. D'ailleurs on obtient ainsi tous les points de l'arc inférieur, puisque, de même, tout point de ce dernier a pour symétrique un point de l'arc supérieur. Donc le second arc est symétrique du premier.

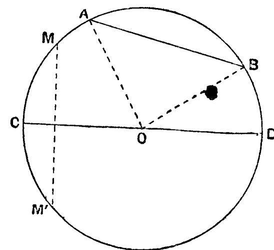


Fig. 54.

Remarque. — On voit que la circonférence a une infinité d'axes de symétrie.

Théorème. — *Le diamètre perpendiculaire à une corde partage cette corde et chacun des arcs qu'elle sous-tend en deux parties égales.*

Car le diamètre perpendiculaire à une corde AB, étant un axe de symétrie pour la circonférence et, d'autre part, pour le triangle isoscèle OAB, est un axe de symétrie pour la figure formée par leur ensemble.

Corollaires. — Deux quelconques des cinq conditions suivantes :

1° Être perpendiculaire à la corde ;

2° Passer par le centre ;

3° Passer par le milieu de la corde ;

4°, 5° Passer par le milieu de l'un des deux arcs sous-tendus déterminent une droite.

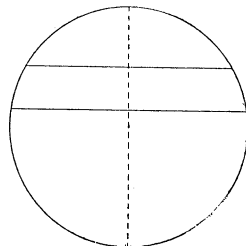


Fig. 59.

Toutes les droites ainsi déterminées se confondent.

Le lieu géométrique des milieux d'une série de cordes parallèles est le diamètre perpendiculaire à ces cordes.

La tangente est parallèle aux cordes que le diamètre du point de contact divise en deux parties égales.

Théorème. — *Deux parallèles interceptent entre elles, sur la circonférence, des arcs égaux* (*fig.* 59).

Car ces arcs sont symétriques l'un de l'autre, par rapport au diamètre perpendiculaire aux deux parallèles.

EXERCICES

50. Une circonférence passe par deux points fixes A et B. Soit C l'un des points où cette circonférence rencontre une droite fixe perpendiculaire à AB. Trouver le lieu du point diamétralement opposé à C, lorsque la circonférence varie sans cesser de passer par les points A, B. (Utiliser l'exercice 34.)

51. En divisant une corde en trois parties égales et joignant au centre les points de division, on ne divise pas l'angle au centre correspondant en trois parties égales. — Quel est le plus grand des trois angles partiels? (Ex. 7.)

Généraliser pour un plus grand nombre de parties.

CHAPITRE III

ARCS ET CORDES

63. *Deux circonférences de même rayon sont égales*, car elles se confondent si l'on fait coïncider leurs centres (**57**).

Théorème. — *Dans un même cercle ou dans des cercles égaux :*

1° *A des arcs égaux correspondent des angles au centre égaux et des cordes égales, et réciproquement;*

2° *De deux arcs inégaux, moindres qu'une demi-circonférence, le plus grand correspond au plus grand angle au centre et à la plus grande corde.*

1° Si nous faisons coïncider les deux arcs égaux, les extrémités coïncidant chacune à chacune, les cordes coïncideront. De plus, les centres coïncidant (**57**), les angles au centre coïncident.

Inversement, si deux arcs correspondent à des angles au centre égaux, on peut faire coïncider ces angles au centre. Dans ces conditions, les centres coïncident et, les rayons étant égaux, les arcs coïncident nécessairement.

Enfin, si les cordes sont égales, les angles au centre sont égaux

d'après le troisième cas d'égalité des triangles et, par suite, les arcs sont aussi égaux.

2° Deux arcs AB, A'B' (*fig.* 60) étant inégaux, on peut les transporter l'un sur l'autre, de manière à ce que le plus petit AB tienne à l'intérieur du plus grand A'B'. Dans cette position, les centres coïncidant en O, l'angle au centre du premier sera compris à l'intérieur de l'angle au centre du second. La réciproque se démontre de même. D'ailleurs la corde AB sera plus petite que A'B', comme le montre le théorème du n° **28** appliqué aux triangles OAB, OA'B'.

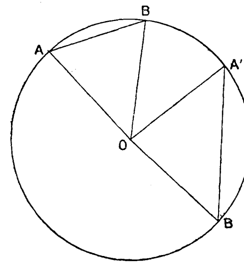


Fig. 60.

Théorème. — *Dans un même cercle ou dans des cercles égaux :*

1° *Deux cordes égales sont également éloignées du centre, et réciproquement ;*

2° *De deux cordes inégales, la plus grande est la moins éloignée du centre.*

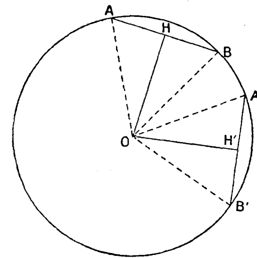


Fig. 61.

1° Si, du centre O, nous abaissons sur les cordes égales AB, A'B' (*fig.* 61) les perpendiculaires OH, OH', les points H, H' seront respectivement les milieux des deux cordes, de sorte qu'on aura HA = H'A'. Les triangles rectangles OHA, OH'A' sont dès lors égaux (2ᵉ cas), d'où résulte OH = OH'.

Inversement, si les deux cordes AB, A'B' sont également distantes du centre, les triangles rectangles OHA, OH'A' ont l'hypoténuse égale et le côté OH = OH', d'où résulte HA = HA' et par suite AB = A'B'.

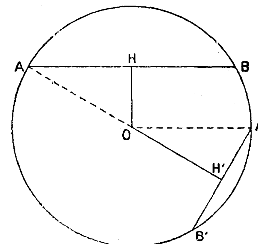


Fig. 62.

2° Supposons la corde AB plus grande que A'B' (*fig.* 62). Il en résulte que l'angle AOB est plus grand que A'OB' et, en abaissant les perpendiculaires OH, OH', que $\widehat{AOH}$ est supérieur à $\widehat{A'OH'}$. Mais alors $\widehat{OAH}$, complément

du premier angle, est inférieur à $\widehat{OA'H'}$, complément du second. Les deux triangles rectangles OHA, OH'A' ont donc l'hypoténuse égale et un angle aigu inégal, d'où résulte (**35**) $OH < OH'$.

64. Considérons une corde MM' (*fig.* 63) qui se déplace de manière que sa distance au centre, d'abord plus petite que le rayon, augmente et devienne égale à ce rayon. Supposons, pour fixer les idées, que cette corde se déplace en restant perpendiculaire à un diamètre fixe OA, de façon à coïncider avec la tangente en A lorsque sa distance au centre sera égale au rayon. La longueur MM' diminue à mesure que la corde se rapproche de la tangente en A, d'après le théorème précédent, et l'on peut prendre le point M assez voisin du point A (c'est-à-dire la corde assez voisine de la tangente) pour que cette longueur soit aussi petite qu'on le veut, puisqu'on a $MM' < 2MA$. On voit donc que les points M, M' se rapprochent indéfiniment l'un de l'autre et tendent à se confondre au point A : ce qu'on exprime en disant que *la tangente a, avec la circonférence, deux points communs confondus* en A. Nous verrons que cette manière de parler permet d'énoncer plus rapidement un certain nombre de théorèmes.

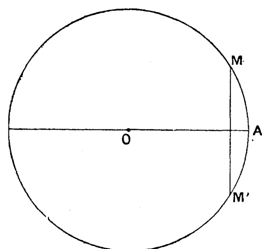


Fig. 63.

EXERCICES

52. Si deux cordes d'une circonférence sont égales et qu'on les prolonge, s'il y a lieu, jusqu'à leur point d'intersection, les segments compris entre ce point et les extrémités des deux cordes sont égaux chacun à chacun.

53. Quel est le lieu des milieux des cordes d'une circonférence qui ont une longueur donnée ?

54. Quelle est la plus petite corde d'une circonférence qu'on puisse mener par un point intérieur à cette courbe ?

CHAPITRE IV

INTERSECTION DE DEUX CERCLES

65. *Deux circonférences ne peuvent avoir plus de deux points communs*, d'après le théorème du n° **57**.

Théorème. — *Lorsque deux circonférences se coupent, la droite qui joint leurs centres est perpendiculaire sur la corde commune et la divise en deux parties égales. Lorsqu'elles ont un seul point commun, ce point est situé sur la ligne des centres, et réciproquement.*

En effet, la ligne des centres est pour les deux cercles un axe de symétrie commun. Si les deux courbes se coupent en un point non situé sur cette ligne, le second point commun est le symétrique du premier. Si le point commun est unique, il est par suite nécessairement sur la ligne des centres.

Réciproquement, s'il y a un point commun situé sur la ligne des centres, ce point est le seul commun. Car un second point d'intersection serait, ou sur la ligne des centres, auquel cas les deux circonférences auraient un diamètre commun; ou extérieur à cette ligne, ce qui entraînerait l'existence d'un troisième point commun. Dans les deux hypothèses, les deux cercles coïncideraient.

Définition. — On dit que deux courbes sont *tangentes* si elles ont la même tangente au même point.

D'après le théorème qui précède, cette définition, dans le cas de deux cercles, revient à celle-ci : *Deux circonférences tangentes sont deux circonférences qui ont un seul point commun;* car un point commun, où la tangente est la même, est nécessairement un point de la ligne des centres, et réciproquement (**58**, Corollaire).

66. Soient O, O′ les centres de deux circonférences dont les rayons sont R, R′, en supposant, pour fixer les idées, que R′ soit le plus petit des deux : $R' \leqslant R$.

Il peut se présenter cinq cas :

1° $OO' > R + R'$ (*fig.* 64).

Soit alors M un point situé sur la circonférence O′ ou intérieur à cette circonférence, de sorte que $O'M \leqslant R'$. On aura (**26**, Corollaire).

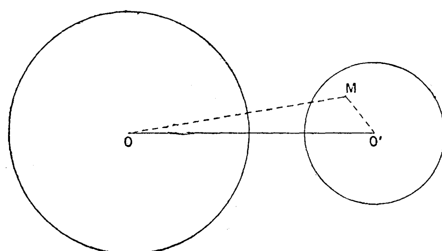


Fig. 64.

$$OM \geqslant OO' - O'M$$
$$> R + R' - O'M > R.$$

Donc, tout point compris dans le second cercle est extérieur au premier, et tout point du premier extérieur au second. Les deux circonférences sont dites *extérieures*.

2° $OO' = R + R'$. Alors OO′ peut être regardé comme la somme de deux segments OA, O′A (*fig.* 65), respectivement égaux à R et R′. Le point A est commun; d'ailleurs pour tout autre point, les raisonnements précédents continuent à s'appliquer. Les circonférences sont donc *tangentes extérieurement*.

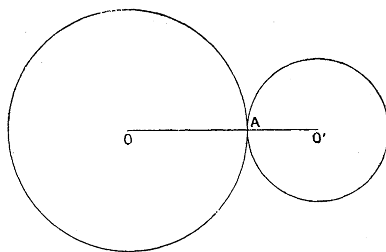


Fig. 65.

3° $R + R' > OO' > R - R'$.

Dans ce cas, le rayon R′ est compris entre la somme et la différence des deux longueurs OO′, R.

Donc, des deux points A, B où la circonférence O coupe la ligne des centres, l'un est extérieur, l'autre intérieur à la circonférence O′ (*fig.* 66) : par suite la circonférence O, qui est une ligne allant du point A au point B, rencontre cette deuxième circonférence en un point

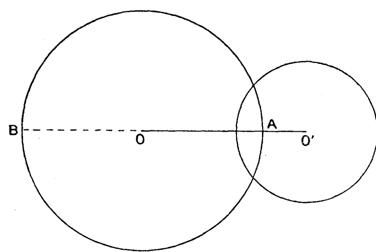


Fig. 66.

différent de A et de B, c'est-à-dire situé en dehors de la ligne des centres.

Les deux circonférences ont donc deux points communs. Elles sont dites *sécantes*.

4° $OO' = R - R'$.

Dans ce cas, OO' peut être regardé comme la différence de deux segments OA, O'A (*fig.* 67) respectivement égaux à R, R'. Le point A de la ligne des centres est commun, de sorte que les circonférences sont tangentes.

Soit d'ailleurs M un point situé sur la circonférence O' ou à l'intérieur de cette circonférence. On a successivement

$$OM \leqslant OO' + O'M \leqslant OO' + R',$$

c'est-à-dire $OM \leqslant R$.

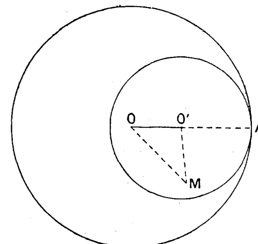


Fig. 67.

Le point M est donc nécessairement à l'intérieur de la circonférence O ou sur cette circonférence, ce dernier cas ne pouvant se présenter que pour le seul point A. Le cercle O' tout entier, à l'exception du point A, est donc à l'intérieur de O. Les circonférences sont *tangentes intérieurement*.

5° $OO' < R - R'$ (*fig.* 68).

Soit encore M un point intérieur à O' ou situé sur O'. Il viendra.

$$OM \leqslant OO' + O'M \leqslant OO' + R' < R.$$

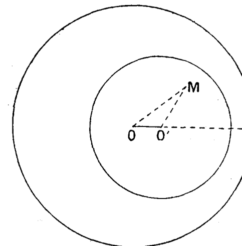


Fig. 68.

Donc, tout le cercle O' est à l'intérieur de O. Les deux circonférences sont *intérieures* l'une à l'autre.

L'énumération que nous venons de faire embrasse tous les cas possibles. Il en résulte que les réciproques des conclusions précédentes sont vraies. Par exemple, si deux circonférences sont sécantes, la distance des centres est comprise entre la somme des rayons et leur différence : car si cette distance était supérieure à la somme des rayons, les circonférences seraient extérieures ; si elle était égale à cette même somme, les deux circonférences seraient tangentes extérieurement, etc.

Au reste, chacune de ces réciproques se démontre directement. Ainsi, dans le cas des circonférences sécantes, le point d'intersection forme avec les deux centres un triangle et les théorèmes du nº **26** fournissent la conclusion précédente.

On peut donc énoncer le théorème suivant :

Théorème. — 1° *Si deux circonférences sont extérieures, la distance des centres est plus grande que la somme des rayons, et réciproquement;*

2° *Si elles sont tangentes extérieurement, la distance des centres est égale à la somme des rayons, et réciproquement;*

3° *Si elles se coupent, la distance des centres est comprise entre la somme des rayons et leur différence, et réciproquement;*

4° *Si elles sont tangentes intérieurement, la distance des centres est égale à la différence des rayons, et réciproquement;*

5° *Si l'une est intérieure à l'autre, la distance des centres est moindre que la différence des rayons, et réciproquement.*

On peut encore dire : *Deux cercles sont extérieurs, intérieurs, sécants ou tangents, suivant que les segments qu'ils déterminent sur la ligne des centres sont extérieurs, intérieurs, empiètent l'un sur l'autre ou ont une extrémité commune.*

67. Si deux circonférences, d'abord sécantes, varient de manière à devenir tangentes en un point A, leurs points d'intersection se rapprochent indéfiniment l'un de l'autre et du point A (Voir Exercice 55.)

Aussi dit-on, comme précédemment (**64**), que *deux circonférences tangentes ont deux points communs confondus.*

EXERCICES

55. Soient O le centre d'une circonférence de rayon R, O′ le centre d'une autre circonférence de rayon R′ qui coupe la première; A l'un des points où la ligne OO′ coupe la circonférence O, B un autre point pris sur cette même circonférence d'une façon arbitraire et, en particulier, aussi près qu'on le veut de A.

Montrer que les deux circonférences ont un de leurs points d'intersections situé sur le petit arc AB :

Lorsque le point O′ est sur le prolongement de OA au delà du point A, si la différence $R + R' - OO'$ est moindre que $OB + O'B - OO'$;

Lorsque le point O′ est sur OA lui-même, si la différence $OO' - (R - R')$ est plus petite que $OO' - (OB - O'B)$;

Lorsque le point O′ est sur OA prolongé au delà de O, si la différence OO′ — (R′ — R) est plus petite que OO′ — (O′B — OB).

56. Quelle est la plus petite et quelle est la plus grande droite qu'on peut mener entre deux circonférences?

57. Quel est le lieu des centres des circonférences de rayon donné qui touchent une circonférence fixe?

58. Si, par le point de contact de deux circonférences tangentes, on mène une droite quelconque, celle-ci coupe les deux courbes en deux autres points tels que les rayons qui y aboutissent sont parallèles.

59. Deux circonférences tangentes intérieurement restent tangentes si, sans changer les centres, on augmente ou diminue les rayons d'une même quantité.
Deux circonférences tangentes extérieurement restent tangentes si, sans changer les centres, on diminue l'un des rayons en augmentant l'autre de la même quantité.

CHAPITRE V

MESURE DES ANGLES

68. Mesures en général(1). — On sait qu'on appelle *rapport* de deux grandeurs de même espèce, le **nombre** qui exprime combien de fois l'une des grandeurs contient l'autre ou une partie aliquote de cette autre.

Il peut arriver que nulle partie aliquote, si petite qu'elle soit, de la seconde grandeur, ne soit contenue exactement dans la première. Alors le rapport sera défini par l'ensemble de ses valeurs à $\frac{1}{n}$ près, lesquelles expriment combien de fois la première grandeur contient la n^{me} partie de la seconde avec un reste plus petit que cette n^{me} partie; n prenant d'ailleurs toute la suite des valeurs entières.

En particulier, le rapport de deux grandeurs de même espèce A, B

(1) Voir pour toutes les propriétés des rapports et des mesures énoncées dans ce numéro, les *Leçons d'Arithmétique* de M. Tannery, chap. x et xiii.

est égal au rapport de deux grandeurs de même espèce l'une que l'autre (mais non nécessairement que les premières) A', B' si, quel que soit n, la valeur à $\frac{1}{n}$ près du premier rapport est égale à la valeur à $\frac{1}{n}$ près du second.

La *mesure* d'une grandeur, relative à une grandeur déterminée de même espèce prise pour unité, est le rapport de la grandeur donnée à l'unité.

On démontre d'ailleurs les propriétés suivantes :

1° *Deux grandeurs qui ont même mesure, relativement à une même unité, sont égales;*

2° *Le rapport de deux grandeurs de même espèce est égal au rapport des nombres qui leur servent de mesures respectives, relativement à une même unité;*

3° *Le rapport de deux nombres est égal au quotient de ces deux nombres;*

4° *Étant donnée la mesure d'une grandeur relative à une unité déterminée, si l'on veut obtenir la mesure de cette même grandeur relative à une autre unité, il suffit de multiplier la mesure primitive par le rapport de l'ancienne unité à la nouvelle;*

Etc.

69. Les définitions que nous venons de rappeler nous permettent d'établir une convention essentielle pour la suite.

Dorénavant, nous supposerons que toutes les grandeurs sur lesquelles nous raisonnerons aient été mesurées, une unité déterminée ayant été choisie pour chaque espèce de grandeur; et, dans toutes les égalités que nous écrirons, les quantités qui figureront dans les deux membres ne représenteront plus les grandeurs elles-mêmes, mais bien leurs mesures.

Nous pourrons ainsi écrire une foule d'égalités qui, autrement, n'auraient aucun sens. Par exemple, il pourra nous arriver d'égaler entre elles deux grandeurs d'espèce différente, puisqu'il s'agira de l'égalité des deux *nombres* qui les mesurent, égalité dont le sens est parfaitement clair. Nous pourrons de même écrire le produit de deux grandeurs quelconques, puisqu'on a défini le produit de deux nombres, etc.

D'ailleurs, quand nous écrirons, comme précédemment, l'égalité de deux grandeurs de même espèce, cette égalité aura la même signification que par le passé, car l'égalité des deux grandeurs et celle de leurs mesures reviennent l'une à l'autre (numéro précédent).

70. Théorème. — *Dans un même cercle ou dans des cercles égaux, le rapport de deux angles au centre est égal à celui des arcs qu'ils interceptent.*

Soient [1] (*fig.* 69) les deux arcs AB, CD du cercle O. Divisons l'angle au centre COD en n parties égales et supposons que l'une de ces parties puisse être reportée m fois, mais non $m+1$, dans l'angle AOB : la valeur à $\frac{1}{n}$ près (par défaut) du rapport $\frac{\text{AOB}}{\text{COD}}$ est $\frac{m}{n}$.

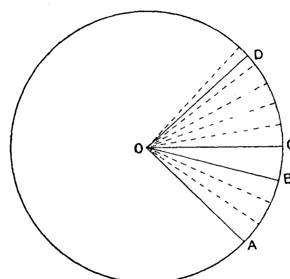


Fig. 69.

Mais, en divisant l'angle COD en n parties égales, nous avons du même coup divisé l'arc CD en n parties égales (**63**). Si la $n^{\text{ème}}$ partie de COD a pu être reportée m fois, mais non $m+1$ sur l'angle AOB, il en résulte (même numéro) que la $n^{\text{ème}}$ partie de CD peut être reportée m fois, mais non $m+1$ dans l'arc AB. Les valeurs à $\frac{1}{n}$ près des deux rapports sont donc égales ; et, ceci ayant lieu pour n'importe quelle valeur de n, le théorème est démontré.

Corollaire. — *Si l'on a pris, pour unité d'angle, l'angle au centre qui intercepte entre ses côtés l'unité d'arc, tout angle au centre a même mesure que l'arc compris entre ses côtés.*

Cet énoncé revient au précédent, puisque la mesure d'une grandeur est le rapport de cette grandeur à son unité.

(1) Le théorème devient évident si l'on admet cette proposition d'arithmétique (Tannery, *Leçons d'Arithmétique*, chap. XIII, n° 493) : *Deux grandeurs sont proportionnelles si : 1° à une même valeur de la première correspond toujours une même valeur de la seconde, et 2° à la somme de deux valeurs de la première, la somme des valeurs correspondantes de la seconde.* La seconde condition est ici vérifiée évidemment, la première en vertu du n° **63**.

La démonstration du texte ne fait d'ailleurs que reproduire, dans ce cas particulier, la démonstration du théorème général d'arithmétique.

71. Dans tout ce qui va suivre, il sera toujours supposé implicitement que, *sur chaque circonférence, on a pris, pour unité d'arc, l'arc intercepté par un angle au centre égal à l'unité d'angle;* moyennant quoi le corollaire précédent s'énonce sous la forme abrégée : *L'angle au centre a pour mesure l'arc compris entre ses côtés.*

D'après la convention du n° **69**, on peut écrire, AB étant un arc quelconque et O le centre de la circonférence :

$$\widehat{AOB} = \text{arc } AB.$$

Il importe, toutefois, d'insister sur ce fait que l'égalité précédente suppose essentiellement l'unité d'angle et l'unité d'arc choisies de manière à vérifier la condition ci-dessus spécifiée.

72. La circonférence a été divisée en 360 parties égales appelées *degrés*, dont chacune comprend 60 *minutes*, lesquelles sont elles-mêmes divisées chacune en 60 *secondes*. On mesure les arcs en degrés et, par suite, les angles sont également mesurés en degrés, le nombre de degrés, minutes et secondes d'un angle étant le nombre de degrés, minutes et secondes de l'arc intercepté par cet angle sur une circonférence ayant son centre au sommet. Comme on peut disposer autour du centre quatre angles droits, l'angle droit correspond au quart de la circonférence, soit 90 degrés. Il en résulte que la mesure d'un angle au centre ne dépend pas du rayon de la circonférence sur laquelle on a compté les arcs, puisque l'unité d'angle choisie (le degré) a une valeur indépendante de ce rayon, à savoir la quatre-vingt-dixième partie de l'angle droit.

On emploie, pour écrire les angles (ou les arcs) en degrés, minutes et secondes, une notation abrégée : l'angle de 87 degrés, 34 minutes et 25 secondes, s'écrit : $87° \, 34' \, 25''$.

73. On nomme *angle inscrit* dans une circonférence, l'angle formé par deux cordes qui ont une extrémité commune ; autrement dit, l'angle inscrit est celui qui a son sommet sur la circonférence.

Théorème. — *Tout angle inscrit dans une circonférence a pour mesure la moitié de l'arc compris entre ses côtés.*

Nous distinguerons trois cas :

Premier cas. — L'un des côtés de l'angle inscrit passe par le centre.

Soit l'angle inscrit $\widehat{BAC}$ (*fig.* 70) dont le côté AC passe par le centre O. Joignons BO. Nous formons ainsi un triangle isoscèle OAB dans lequel les angles $\hat{A}$ et $\hat{B}$ sont égaux. L'angle extérieur $\widehat{BOC}$ de ce triangle, égal à la somme $\hat{A} + \hat{B}$, est donc le double de l'angle $\hat{A}$. Or cet angle $\widehat{BOC}$ a pour mesure l'arc BC ; par conséquent l'angle $\widehat{BAC}$ a pour mesure la moitié du même arc.

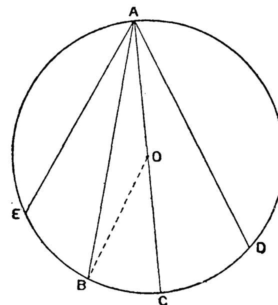


Fig. 70.

Deuxième cas. — Le centre est à l'intérieur de l'angle inscrit.

Soit l'angle inscrit BAD (*fig.* 70). En joignant AO, qui coupe la circonférence en C, nous décomposons l'angle inscrit en deux parties $\widehat{BAC}$, $\widehat{CAD}$ pour chacune desquelles notre théorème est déjà démontré (1er cas). On a donc

$$\widehat{BAC} = \frac{1}{2} \text{arc BC},$$

$$\widehat{CAD} = \frac{1}{2} \text{arc CD},$$

et, par addition,

$$\widehat{BAD} = \frac{1}{2} \text{arc BD}.$$

Troisième cas. — Le centre est à l'extérieur de l'angle inscrit.

Soit l'angle inscrit $\widehat{BAE}$ (*fig.* 70). Nous mènerons encore le diamètre AC et nous pourrons écrire

$$\widehat{BAC} = \frac{1}{2} \text{arc BC},$$

$$\widehat{EAC} = \frac{1}{2} \text{arc EC},$$

d'où, par différence,

$$\widehat{BAE} = \frac{1}{2} \text{arc BE}.$$

C. Q. F. D.

Corollaires. — I. *Tous les angles inscrits dans le même segment de cercle sont égaux* comme ayant même mesure.

II. *L'angle inscrit dans une demi-circonférence est droit* comme ayant pour mesure le quart de la circonférence.

74. Théorème. — *L'angle formé par une tangente et une corde issue du point de contact a pour mesure la moitié de l'arc intercepté par la corde.*

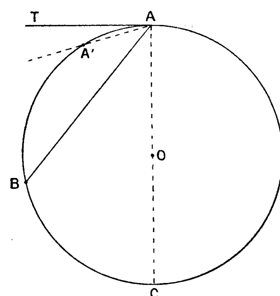


Fig. 71.

L'angle $\widehat{BAT}$, formé par la tangente AT et la corde AB (*fig.* 71) peut en effet être considéré comme la limite de l'angle formé par la corde AB avec la corde AA′, lorsque le point A′ se rapproche indéfiniment du point A.

Au reste, la démonstration donnée pour le troisième cas du théorème précédent s'applique encore ici; l'égalité $EAC = \frac{1}{2}$ arc EC doit simplement être remplacée par

$$\widehat{TAC} = \frac{1}{2} \text{ arc AC},$$

qui résulte de ce que TAC est droit et l'arc AC égal à la demi-circonférence.

75. Théorème. — *L'angle formé par deux sécantes qui se coupent à l'intérieur d'un cercle a pour mesure la demi-somme des arcs interceptés l'un entre ses côtés, l'autre entre ces côtés prolongés.*

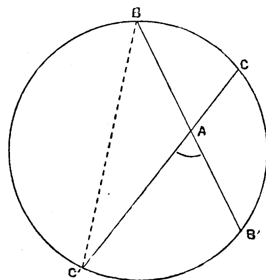


Fig. 72.

Soit l'angle $\widehat{BAC}$ (*fig.* 72) dont les côtés prolongés vont couper la circonférence en B′ et C′. Joignons BC′. Les angles $\widehat{C'}$ et $\widehat{B}$ ont respectivement pour mesure les moitiés des arcs BC, B′C′. Or ces deux angles ont pour somme l'angle $\widehat{A}$, extérieur au triangle ABC′.

76. Théorème. — *L'angle formé par deux sécantes qui se ren-*

contrent hors du cercle a pour mesure la demi-différence entre l'arc concave et l'arc convexe compris entre ses côtés.

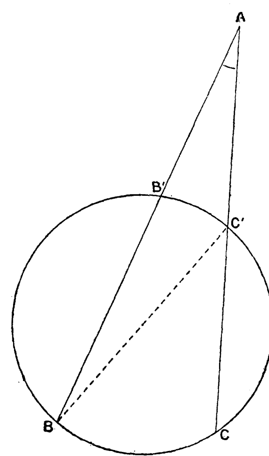


Fig. 73.

Soit l'angle $\widehat{BAC}$ (*fig.* 73) formé par les sécantes AB'B, AC'C. Joignons encore $\widehat{BC'}$. L'angle BC'C, extérieur au triangle ABC', est égal à la somme $\widehat{A} + \widehat{B}$. Donc on peut évaluer l'angle $\widehat{A}$ comme la différence $\widehat{BC'C} - \widehat{B}$: ce qui démontre le théorème, puisque l'angle $\widehat{BC'C}$ intercepte l'arc BC et l'angle $\widehat{B}$, l'arc B'C'.

Remarque. — Si l'une des sécantes, AB'B par exemple, est remplacée par une tangente AT (*fig.* 74), le théorème et sa démonstration subsistent sans aucune modification, à la condition de faire jouer au point T à la fois le rôle du point B et celui du point B': en un mot, d'admettre que la *tangente a, avec la circonférence, deux points communs confondus en* T, conformément à la convention du nº **64**.

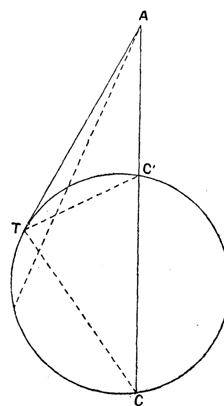


Fig. 74.

77. Théorème. — *Le lieu géométrique des points situés d'un même côté d'une droite et d'où l'on voit un segment donné de cette droite sous un angle donné est un arc de cercle terminé aux extrémités du segment.*

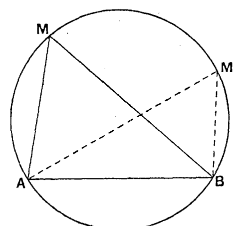


Fig. 75.

Soient en effet AB le segment de droite donné; M un point du lieu (1), c'est-à-dire un point tel que l'angle $\widehat{AMB}$ soit égal à l'angle donné (*fig.* 75). Si par les points A, M, B, nous faisons passer un arc

(1) Il existe certainement de tels points. On en obtient en menant, par les points A et B, des

de circonférence terminé aux points A et B, tout point de cet arc appartiendra au lieu, puisque l'angle $\widehat{AM'B}$ sera égal à l'angle $\widehat{AMB}$ (**73**). Au contraire, tout autre point N du plan (situé du même côté de la droite AB) sera soit intérieur, soit extérieur à la circonférence que nous venons de tracer. Dans le premier cas, l'angle $\widehat{ANB}$ sera plus grand que l'angle donné (**75**) ; dans le second cas plus petit (**76**), et par conséquent le point N ne fera pas partie du lieu.

C. Q. F. D.

Le segment de cercle ainsi tracé est dit le segment *capable* de l'angle donné décrit sur AB.

Si nous faisions abstraction de la condition, imposée aux points du lieu, d'être d'un côté déterminé de AB, il est clair que le lieu se composerait de deux segments de cercle symétriques l'un de l'autre par rapport à AB.

78. Lorsque l'angle donné est droit, l'énoncé précédent, combiné avec le corollaire II du n° **73**, nous montre que *le lieu des points d'où l'on voit un segment de droite donné sous un angle droit, est la circonférence qui a ce segment pour diamètre.*

C'est ce qui résulte aussi des deux corollaires du n° **48**.

79. Quatre points pris au hasard ne seront pas, en général, sur une même circonférence ; car trois d'entre eux déterminent un cercle qui, en général, ne passera pas par le quatrième point.

La condition pour que quatre points appartiennent à un même cercle va nous être fournie par le théorème suivant :

Théorème. — *Dans tout quadrilatère convexe inscrit dans un cercle, les angles opposés sont supplémentaires.*

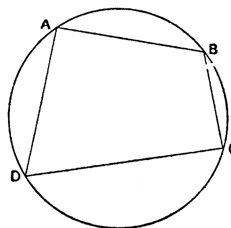


Fig. 76.

Dans le quadrilatère inscrit ABCD (*fig.* 76) :

L'angle $\widehat{A}$ a pour mesure le demi-arc DCB ;

L'angle $\widehat{C}$ a pour mesure le demi-arc DAB.

Les arcs DCB, DAB ayant pour somme la circonférence entière, la somme $\widehat{A} + \widehat{C}$

parallèles aux côtés d'un angle égal à l'angle donné et choisissant, entre les deux sommets nouveaux du parallélogramme ainsi formé, celui qui est, par rapport à AB, du côté voulu.

est égale à l'angle au centre qui correspond à la demi-circonférence, c'est-à-dire à deux droits.

80. Réciproque. — *Si, dans un quadrilatère convexe, deux angles opposés sont supplémentaires, le quadrilatère est inscriptible à un cercle.*

Soit le quadrilatère ABCD (*fig.* 76), dans lequel les angles $\widehat{A}$ et $\widehat{C}$ sont supplémentaires. L'arc de cercle qui joint les points D, A, B, prolongé au delà de BD, est le lieu des points d'où l'on voit la droite BD sous un angle constant (**77**), lequel est (**79**) supplémentaire de l'angle $\widehat{A}$. Cet arc de cercle passe donc par le point C.

81. Remarque. — Dans tout quadrilatère ABCD, on peut considérer les quatre angles $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$, $\widehat{D}$, puis, en menant les diagonales AC, BD, les huit angles que nous avons numérotés de 1 à 8 sur la figure 77.

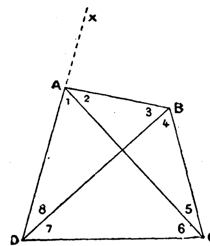


Fig. 77.

Si le quadrilatère est inscriptible :

1° $\widehat{A}$ et $\widehat{C}$ sont supplémentaires;

2° $\widehat{B}$ et $\widehat{D}$ sont supplémentaires;

3° $\widehat{1}$ et $\widehat{4}$ sont égaux (comme inscrits dans le même segment); de même:

4° $\widehat{5}$ et $\widehat{8}$ sont égaux;

5° $\widehat{2}$ et $\widehat{7}$ sont égaux;

6° $\widehat{3}$ et $\widehat{6}$ sont égaux.

Inversement, si l'une quelconque de ces conditions est vérifiée, le quadrilatère est inscriptible (**77**, **80**).

Donc *chacune des conditions* 1°, 2°, 3°, 4°, 5°, 6° *entraîne toutes les autres.*

82. Les conditions 1° et 2° qui figurent dans la remarque précédente peuvent se mettre sous une forme qui les rapproche des conditions 3° — 6°.

Remarquons d'abord que, les points A et B (*fig.* 77) étant du même côté de CD, les triangles CDA, CDB ont le même sens de rotation, de sorte que les angles égaux $\widehat{DAC}$, $\widehat{DBC}$ sont de même sens. Il en est de même pour les angles $\widehat{ACB}$, $\widehat{ADB}$, etc. Au contraire,

les angles $\widehat{DAB}$, $\widehat{DCB}$ sont de sens différents, puisque A et C sont de part et d'autre de BD. Prolongeons alors DA au delà du point A suivant Ax, de manière à former un angle $\widehat{xAB}$ de même sens que $\widehat{DCB}$: nous voyons que ces deux angles de même sens sont égaux si les angles $\widehat{DAB}$, $\widehat{DCB}$ sont supplémentaires, et nous arrivons à la conclusion suivante :

Si les quatre points A, B, C, D *sont sur une même circonférence, les angles de même sens formés par les droites* AC, AD *d'une part;* BC, BD *d'autre part sont égaux; et sont remplies également toutes les conditions que l'on déduit de la précédente en permutant les lettres* A, B, C, D.

Inversement, *l'une quelconque des six conditions précédentes entraîne l'inscriptibilité du quadrilatère et, par suite, les cinq autres conditions.*

82 *bis*. L'énoncé du n° **77** peut de même être remplacé par le suivant : *Le lieu des sommets des angles égaux et de même sens dont les côtés (prolongés, s'il y a lieu) passent par deux points donnés, est une circonférence* qui passe par ces deux points.

Comme toute circonférence peut être obtenue de cette manière, cet énoncé peut être considéré comme une nouvelle définition de la circonférence, équivalente à la première et susceptible de la remplacer au besoin.

EXERCICES

60. Lieu des milieux des cordes d'un cercle qui passent par un point fixe.

61. Sur chaque rayon d'un cercle, on prend, à partir du centre, une longueur égale à la distance de l'extrémité de ce rayon à un diamètre fixe. Lieu des extrémités des segments ainsi obtenus.

62. On donne un cercle et une corde fixe AB de ce cercle. Soit CD une seconde corde mobile, mais de longueur constante :

1° Lieu du point d'intersection I des droites AC, BD;

2° Lieu du point d'intersection K des droites AD, BC;

3° Lieux des cercles circonscrits aux deux triangles ICD, KCD. Montrer que ces lieux sont respectivement égaux aux deux premiers.

63. A, B étant deux points fixes d'une circonférence, M un point variable de cette courbe, on prolonge la droite MA d'une longueur MN = MB. Lieu du point N.

64. A, B, C étant trois points d'une circonférence, on joint les milieux des arcs AB, AC. Montrer que la droite de jonction intercepte sur les cordes AB, AC, à partir du point A, des segments égaux.

65. Si, par les points d'intersection A, B de deux circonférences, on mène deux sécantes quelconques, les cordes qui joignent les nouvelles intersections de ces droites avec les deux circonférences sont parallèles.

66. Les bissectrices des angles d'un quadrilatère quelconque forment un quadrilatère inscriptible. Il en est de même des bissectrices des angles extérieurs.

67. Par le milieu C d'un arc de cercle AB, on mène deux droites quelconques qui coupent la circonférence en D, E et la corde AB en F, G. Démontrer que le quadrilatère DEFG est inscriptible.

68. On donne un cercle et sur ce cercle un point fixe P, une droite et sur cette droite un point fixe Q. Par les points P, Q on fait passer une circonférence variable, qui coupe à nouveau la circonférence donnée en R et la droite donnée en S. Démontrer que la droite RS coupe la circonférence donnée en un point fixe.

69. Deux circonférences se coupent en A, B. Par le point A on mène une sécante mobile qui coupe à nouveau les circonférences en C, C'. Montrer que CC' est vu du point B sous un angle constant, et que cet angle est aussi celui des rayons qui aboutissent aux points C, C'.

Par le point A, on mène une deuxième sécante coupant les circonférences en D, D'. Montrer que l'angle des cordes CD, C'D' est égal au premier ou à son supplément. — Que devient cet énoncé lorsque les deux sécantes viennent à se confondre?

70. Dans tout triangle, les symétriques du point de rencontre des hauteurs par rapport aux trois côtés sont sur le cercle circonscrit.

71. Démontrer que les hauteurs d'un triangle sont les bissectrices des angles du triangle formé par leurs pieds.

On appliquera la méthode du nº **82** aux quadrilatères formés par deux côtés et deux hauteurs, en démontrant que ces quadrilatères sont inscriptibles et utilisant les propriétés angulaires qui en résultent.

La même marche s'applique dans un certain nombre de questions, en particulier dans la suivante.

72. Les pieds des perpendiculaires abaissées d'un point du cercle circonscrit à un triangle sur les trois côtés sont en ligne droite (Droite de *Simson*).

Réciproquement, si les pieds des perpendiculaires abaissées d'un point du plan d'un triangle sur les trois côtés sont en ligne droite, ce point est sur le cercle circonscrit.

CHAPITRE VI

CONSTRUCTIONS

83. On réserve le nom de *constructions géométriques* aux constructions effectuées avec la règle et le compas.

La *règle* est un instrument destiné à tracer des lignes droites. Pour qu'une règle soit bonne, il faut que ses bords soient bien rectilignes. Pour vérifier si cette dernière condition est remplie, on se sert de la définition même de la ligne droite. On trace une première ligne le long du bord de la règle (*fig.* 78); puis on retourne l'instrument en plaçant le même bord de l'autre côté du trait. Si l'instrument est exact, on doit pouvoir dans cette nouvelle position, tracer le long du bord de la règle un second trait coïncidant avec le premier.

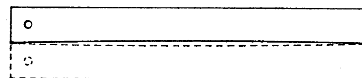


FIG. 78.

Le *compas* se compose de deux tiges pointues articulées entre elles. L'*ouverture* du compas est la distance qui sépare les deux pointes, et l'instrument permet de reporter cette distance ou de décrire un cercle de centre quelconque avec cette distance pour rayon.

84. Outre les deux instruments dont nous venons de parler, on emploie encore, dans la pratique, l'équerre et le rapporteur.

L'*équerre* est un triangle rectangle en bois. Une bonne équerre doit satisfaire à deux sortes de conditions : 1° les côtés doivent être bien rectilignes; 2° l'angle de l'équerre doit être droit.

La première de ces conditions se vérifie comme pour la règle; elle est habituellement remplie, avec une exactitude suffisante, dans les équerres que l'on a à sa disposition. Pour vérifier la

seconde, on applique l'équerre sur le bord de la règle (*fig.* 79) et l'on trace, le long du bord qui doit être perpendiculaire, une droite. Appliquant ensuite l'équerre en sens inverse, comme l'indique la figure, on doit pouvoir tracer un second trait coïncidant avec le premier. Cette seconde condition n'est le plus souvent remplie qu'approximativement ; aussi ne l'admet-on pas comme vérifiée dans les constructions géométriques exactes.

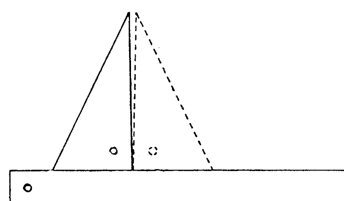


Fig. 79.

Enfin le *rapporteur* est destiné à mesurer les angles en degrés. Il se compose en général d'un demi-cercle en corne ou en cuivre, divisé en 180 parties. Cette division ne pouvant s'effectuer que par approximation, le rapporteur, utile dans la pratique, n'est pas un instrument géométrique.

85. Constr. 1. — *Mener la perpendiculaire au milieu d'une droite* AB (*fig.* 80).

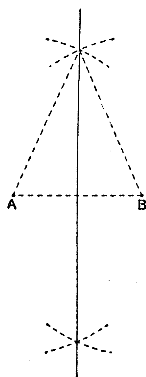


Fig. 80.

Cette perpendiculaire est le lieu des points également distants de A et de B (**33**). Si donc, des points A et B comme centres, nous décrivons des cercles égaux, d'un rayon suffisamment grand pour qu'ils se coupent, les points d'intersection appartiendront à la perpendiculaire cherchée : il ne restera plus qu'à joindre ces deux points.

On ramène à cette construction les deux suivantes :

Constr. 2. — *Mener la perpendiculaire d'un point sur une droite.*

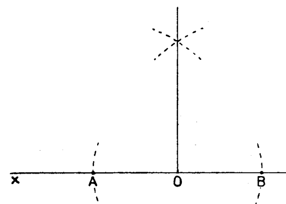


Fig. 81.

Du point donné O (*fig.* 81 ou 81 *bis*) comme centre, on décrit une circonférence qui coupe la droite donnée en deux points A, B. La perpendiculaire au milieu de AB passe par le point O, puisque OA = OB : elle est donc la droite cherchée.

Si le point O est extérieur à la droite, on pourra prendre, comme rayon commun des circonférences qui servent (constr. 1) à trouver la perpendiculaire au milieu de AB, la distance OA : on n'aura pas ainsi à changer l'ouverture du compas. Les deux circonférences se coupent au point O et en un point O′, symétrique du premier par rapport à AB (*fig.* 81 *bis*). Cette simplification n'est pas applicable quand le point O est sur la droite, puisqu'il coïncide avec O′; il en est de même si le point O est très voisin de la droite; car alors les deux points O, O′, étant très voisins l'un de l'autre, ne déterminent pas bien la droite qui les joint.

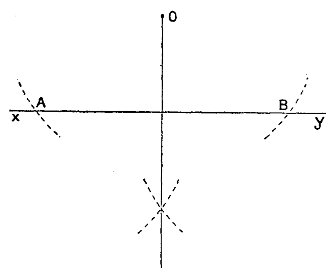


Fig. 81 *bis*.

Constr. 3. — *Mener la bissectrice d'un angle donné* $\widehat{AOB}$ (*fig.* 82).

On portera sur les côtés de l'angle deux longueurs égales OA, OB, de manière à former un triangle isoscèle. La bissectrice de l'angle donné n'est autre que la perpendiculaire au milieu de AB (**23**).

Même simplification que plus haut pour le tracé des arcs de cercle.

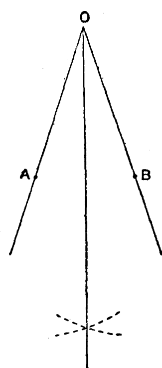


Fig. 82.

86. Const. 4. *Construire un triangle, connaissant les trois côtés.*

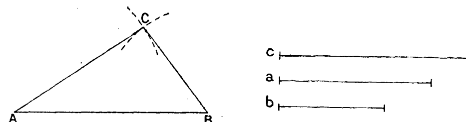


Fig. 83.

Ayant pris la droite BC égale au premier côté (*fig.* 83), on décrit, des points A et C comme centres, des circonférences ayant respectivement pour rayons les deux autres côtés : leur intersection A donne le troisième sommet du triangle. On a ainsi pour ce sommet deux positions possibles, puisque les circonférences se coupent en deux points, mais les triangles correspondants, étant symétriques l'un de l'autre par rapport à BC, sont égaux entre eux.

Conditions de possibilité. — Pour que les deux circonférences se coupent, il faut et il suffit (**66**) que le premier côté soit compris entre la somme des deux autres et leur différence, ou (**26**, Coroll.) que chaque côté soit plus petit que la somme des deux autres.

Quand on connaît l'ordre de grandeur des côtés, il suffit d'écrire que le plus grand côté est plus petit que la somme des deux autres.

Constr. 5. — *Par un point pris sur une droite, mener une autre droite faisant avec la première un angle égal à un angle donné.*

Sur les côtés de l'angle donné O, on prend deux points arbitraires A, B et on construit un triangle égal à OAB, en portant le côté correspondant à OA sur la droite donnée à partir du point donné.

Dans la pratique, on prend le triangle OAB isoscèle, de façon à n'avoir que deux ouvertures de compas différentes à prendre.

Constr. 6. — *Connaissant deux angles d'un triangle, trouver le troisième.*

On construit deux angles adjacents, respectivement égaux aux deux angles donnés et, en prolongeant l'un des côtés extérieurs, on forme un troisième angle égal au supplément de la somme des deux premiers, c'est-à-dire au troisième angle cherché.

Condition de possibilité. — La somme des deux angles donnés doit être inférieure à deux droits.

Constr. 7. — *Construire un triangle, connaissant deux côtés et l'angle compris.*

Sur les côtés d'un angle égal à l'angle donné, on porte les côtés donnés.

Constr. 8. — *Construire un triangle, connaissant un côté et deux angles.*

Tout d'abord, connaissant deux angles, on connaît les trois (Constr. 6) et en particulier les deux adjacents au côté donné : on les placera aux extrémités de ce côté (Constr. 5).

Même condition de possibilité que pour la constr. 6.

87. Constr. 9. — *Construire un triangle, connaissant deux côtés et l'angle opposé à l'un d'eux.*

Soit un triangle ABC, dans lequel on donne l'angle A et les côtés a, b, respectivement opposés aux angles A, B.

Ayant tracé un angle égal à A (*fig*. 84), on portera sur l'un des côtés une distance AC égale à b. Le point C étant ainsi déterminé, le point B doit se trouver sur une circonférence ayant C pour centre et a pour rayon. L'intersection de cette circonférence avec le second côté de l'angle A donne donc ce sommet B, ce qui achève de déterminer le triangle.

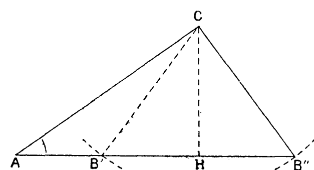


Fig. 84.

Discussion. On aura une solution du problème chaque fois que la circonférence dont nous venons de parler coupera la demi-droite Ax (*fig*. 84), second côté de l'angle A.

Du point C, abaissons sur Ax la perpendiculaire CH.

1° *Si* CH $> a$, la circonférence ne coupe pas la droite et *le problème est impossible*.

2° *Si* CH $< a$, la circonférence coupe la droite indéfinie Ax en deux points B', B''. Mais il reste à savoir si ces points sont sur la demi-droite Ax ou de l'autre côté du point A.

Nous distinguerons deux cas :

') *L'angle* A *est aigu*. En ce cas le point H, milieu de B'B'', est situé sur la demi-droite Ax. Il en est donc nécessairement de même de l'un au moins des points B', B'', de sorte qu'*il y a toujours au moins une solution. Il y en a une seconde* si le second point est entre A et H, ce qui arrive *lorsque* $a < b$, *et alors seulement*.

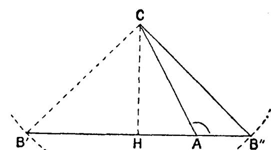


Fig. 85.

'') *L'angle* A *est obtus* (*fig*. 85). Alors le point H ne sera pas sur la demi-droite Ax; par conséquent l'un au moins des points B', B'' ne répondra pas à la question : *il y a au plus une solution. Il y en a une* si ce second point est plus éloigné de H que le point A, ce qui arrive *lorsque* $a > b$ *et alors seulement*.

87 *bis*. Enfin, si l'angle A est droit, le problème s'énonce ainsi : *Construire un triangle rectangle, connaissant l'hypoténuse et un côté de l'angle droit*. Il admet une solution si l'hypoténuse est plus grande que le côté donné.

Remarque. — De ce qui précède résulte le théorème suivant :

Théorème. — *Quand deux triangles ont deux côtés égaux chacun à chacun, ainsi que l'angle opposé à l'un d'eux, les angles opposés aux seconds côtés sont égaux ou supplémentaires. Le premier cas (qui entraîne l'égalité des deux triangles) se présente toujours, si l'angle donné comme égal de part et d'autre est droit ou obtus.*

88. Constr. 10. — *Par un point, mener une parallèle à une droite.*

Prenant sur la droite deux points quelconques A et B (*fig* 86), je trace, du point donné O comme centre, une circonférence de rayon AB et, du point B comme centre, une circonférence de rayon OA. Ces deux lignes se coupent (du côté de OB où n'est pas le point A) en un point C qui appartient à la parallèle cherchée; car le quadrilatère OABC, ayant ses côtés opposés égaux, est un parallélogramme.

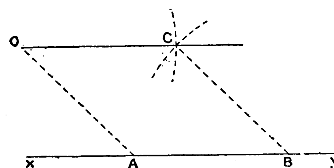


Fig. 86.

On prendra de préférence AB = OA, de manière que toutes les circonférences tracées aient même rayon.

89. Les constructions 2 et 10 peuvent s'effectuer à l'aide de l'équerre.

Pour effectuer la construction 2 : *Mener par un point la perpendiculaire à une droite*, on applique le bord de la règle sur la droite donnée et l'on fait glisser, le long de cette règle, l'un des côtés de l'équerre jusqu'à ce que le second côté, perpendiculaire au premier, passe par le point donné (*fig.* 87) et par suite soit la perpendiculaire cherchée.

Cette construction suppose la condition, en général insuffisamment remplie, que l'angle de l'équerre soit droit; aussi n'est-elle pas employée dans les épures où l'on recherche l'exactitude.

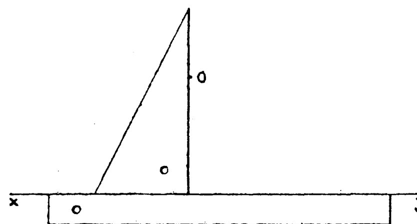


Fig. 87.

Pour effectuer la construction 10 : *Mener par un point la parallèle à une droite*, on fait d'abord coïncider un côté de l'équerre avec la

droite donnée (*fig.* 88). Appliquant ensuite la règle contre un des deux autres côtés et la maintenant dans cette position, on fait glisser l'équerre le long de la règle jusqu'à ce que son bord primitivement en coïncidence avec la droite donnée, vienne passer par le point donné. La nouvelle droite ainsi obtenue et l'ancienne sont bien parallèles comme formant avec une même sécante (le bord de la règle) des angles correspondants égaux ($\widehat{A}$, $\widehat{A'}$, sur la figure).

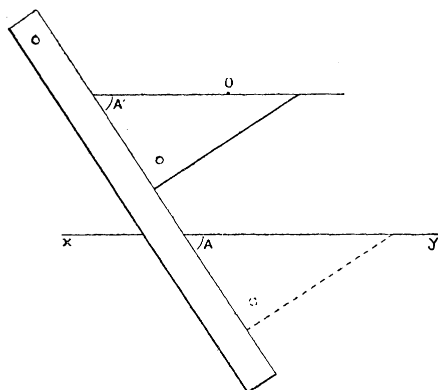


Fig. 88.

Cette construction suppose simplement que les côtés de la règle et de l'équerre sont rectilignes. Aussi, non moins exacte et plus simple que la construction au compas, est-elle usitée dans la pratique à l'exclusion de celle-ci.

90. Constr. 11. — *Diviser un arc de cercle en deux parties égales.*

On mènera la perpendiculaire au milieu de la corde de cet arc (Constr. 1).

Constr. 12. — *Construire la circonférence qui passe par trois points donnés* A, B, C *non en ligne droite.*

On mène les perpendiculaires aux milieux des droites qui joignent les trois points deux à deux : leur intersection donne le centre cherché O; le rayon sera OA.

La circonférence ainsi obtenue est dite *circonscrite* au triangle formé par les trois points.

En général, un polygone (ou une ligne brisée) est dit *inscrit* à une ligne et celle-ci *circonscrite* à lui, lorsque tous les sommets du polygone sont sur la ligne.

Remarque. — Si les trois points A, B, C étaient en ligne droite, il n'y aurait plus de circonférence; mais on devrait la considérer comme remplacée par la ligne droite ABC. *Une ligne droite peut*

être, en effet, *regardée comme cas limite d'une circonférence*, le centre de celle-ci s'éloignant indéfiniment. Effectivement, la ligne droite AB est le lieu des points d'où l'on voit le segment AB sous un angle constant, à savoir un angle nul ou égal à deux droits. On peut, d'ailleurs, démontrer directement qu'une circonférence passant par deux points fixes A, B et dont le centre s'éloigne indéfiniment, a pour limite la droite AB (en définissant convenablement ce que l'on doit entendre par cette locution). (Voir Exercice 147).

Constr. 13. — *Construire une circonférence, connaissant deux points* A, B *et la tangente* AT *en l'un d'eux.*

Le centre O sera à l'intersection de la perpendiculaire au milieu de AB et de la perpendiculaire à AT en A. La circonférence du centre O et de rayon OA sera d'ailleurs bien tangente à AT en A et passera par le point B (*fig.* 89).

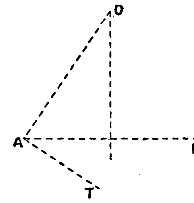


FIG. 89.

REMARQUE. — Cette construction est un cas limite de la précédente, d'après la définition générale des tangentes (**59**).

Constr. 14. — *Décrire, sur une droite donnée, le segment capable d'un angle donné.*

Soit AB la droite donnée. On construit un point M du lieu (note du n° **77**) et on trace la circonférence AMB; ou encore, on remarque que la tangente en A à la circonférence cherchée fait avec AB l'angle donné (**73**, **74**), ce qui permet de la construire (Constr. 5) et l'on est ramené à la construction précédente.

91. Constr. 15. — *Mener la tangente en un point d'une circonférence.*

On mène une perpendiculaire au rayon du point de contact.

Constr. 16. — *Mener à un cercle une tangente parallèle à une direction donnée.*

Le diamètre du point de contact n'est autre que le diamètre perpendiculaire à la direction donnée : ce diamètre a deux extrémités et il y a par conséquent deux solutions.

Constr. 17. — *Mener une tangente à un cercle par un point de son plan.*

Soit à mener par le point A la tangente au cercle O (*fig.* 90). Supposons, pour un instant, le problème résolu et soit T le point de contact d'une tangente au cercle donné passant par le point donné. L'angle $\widehat{ATO}$ étant droit, le point T appartient à la circonférence qui a pour diamètre OA.

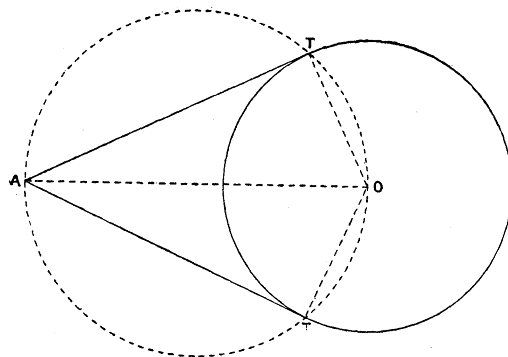


Fig. 90.

Inversement, si un point T de la circonférence donnée appartient à la circonférence décrite sur OA comme diamètre, la tangente au point T passe par le point A, puisque l'angle $\widehat{OTA}$ est droit.

Les points T qui répondent à la question seront donc les points communs à la circonférence donnée et à la circonférence décrite sur OA comme diamètre.

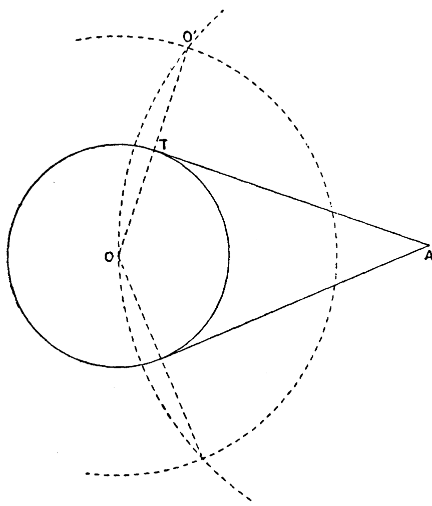


Fig. 91.

Autre méthode. Soit toujours T le point de contact cherché. Prolongeons la ligne OT, au delà du point T, d'une longueur égale à elle-même jusqu'en O′ (*fig.* 91). TA étant perpendiculaire sur OT, le point O′ est le symétrique du point O par rapport à AT, de sorte que AO′ = AO. Le point O′ appartient donc

à une circonférence de centre A et de rayon AO. Comme il appartient d'ailleurs à une circonférence qui a même centre que la circonférence donnée et un rayon double, il est déterminé par l'intersection de ces deux lignes.

Inversement, si le point O′ est tel que $AO' = AO$, le point T, milieu de OO′, est le point de contact d'une tangente menée par A à la circonférence de centre O et de rayon OT, en vertu des propriétés du triangle isoscèle.

Discussion. — Partons, par exemple, de la seconde construction. Il faut, pour qu'il y ait une solution, que les deux circonférences qui déterminent le point O′ se coupent, c'est-à-dire (**66**) que la distance de leurs centres soit comprise entre la somme et la différence de leurs rayons. Ceci donne, en appelant R le rayon de la circonférence donnée :

(1) $$AO \leqslant 2R + AO$$

et

(2) $$AO \geqslant AO - 2R$$

ou (3) $$AO \geqslant 2R - AO,$$

(suivant que AO est plus grand ou plus petit que 2R). Les inégalités (1) et (2) sont évidemment vérifiées d'elles-mêmes. L'inégalité (3) peut s'écrire $2AO \geqslant 2R$ ou $AO \geqslant R$.

Donc le *problème est impossible si le point* A *est intérieur au cercle. Si au contraire le point* A *est extérieur, il y a deux solutions*, puisque les circonférences se coupent en deux points. Enfin *si le point* A *est sur le cercle*, les circonférences qui déterminent le point O′ sont tangentes et *il y a une seule solution*, la tangente au point A, ou plutôt *deux solutions confondues :* car, d'après ce que nous avons remarqué (**67**), si le point A se rapproche indéfiniment de la circonférence, les deux points de contact et, par suite, les deux tangentes tendent à se confondre.

92. Théorème. — *Les deux tangentes menées d'un point à un cercle sont égales et font des angles égaux avec le diamètre passant par le point. Ce diamètre est perpendiculaire sur la corde qui joint les points de contact* (*fig.* 90).

En effet, les deux points de contact sont symétriques l'un de

l'autre par rapport à OA (*fig.* 90), puisqu'ils sont déterminés par l'intersection de deux circonférences ayant leurs centres sur cette ligne (**65**).

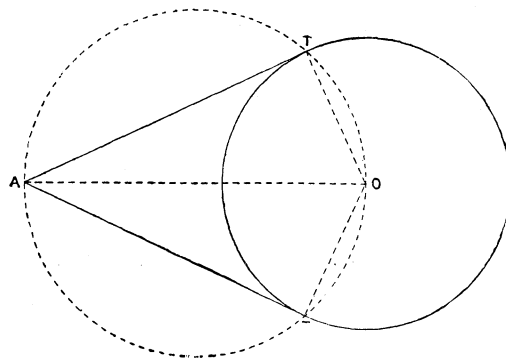


Fig. 90.

93. Constr. 18. — *Mener les tangentes communes à deux cercles.*

Soit à mener les tangentes communes aux deux circonférences O et O′, de rayons respectifs R et R′. Ces tangentes communes peuvent être de deux sortes : elles peuvent être *extérieures* (*fig.* 92), c'est-à-dire laisser les deux cercles d'un même côté; ou *intérieures* (*fig.* 93), lorsque les deux cercles sont de part et d'autre de la tangente.

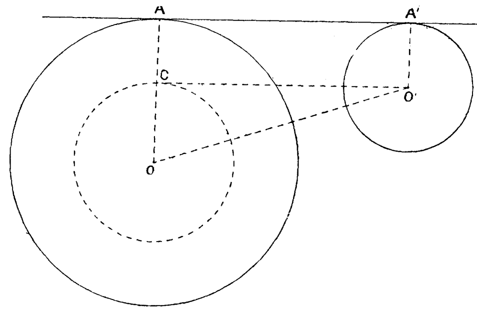


Fig. 92.

1° *Tangentes communes extérieures.* — Supposons le problème résolu et soit AA′ la tangente cherchée (*fig.* 92), les points de contact étant A et A′, de sorte que OA et O′A′ sont perpendiculaires à AA′. Par le point O′ soit menée une parallèle O′C à AA′ jusqu'à rencontre en C avec OA. C'est ce point C que nous allons déterminer.

A cet effet, nous remarquerons que le quadrilatère CAA′O′ est un rectangle, de sorte que l'on a $AC = R'$ et par suite [1] $OC = R - R'$. Le point C appartient donc à une circonférence que nous pouvons décrire, puisque nous en avons le centre O et le rayon, égal à la diffé-

(1) Nous avons supposé, pour fixer les idées, que l'on a pris pour la circonférence O la plus grande des deux données. Mais cette supposition, que nous aurions d'ailleurs le droit de faire, n'a rien d'essentiel ici ; dans le cas contraire, on aurait $OC = R' - R$.

rence des rayons donnés. D'ailleurs la droite CO′ est tangente à cette circonférence, puisque l'angle $\widehat{OCO'}$ est droit. Nous sommes donc ramenés à la construction 17.

Une fois le point C déterminé, le prolongement du rayon OC donne le point A. La tangente en A à la circonférence O est d'ailleurs bien une tangente commune, car inversement, en abaissant du point O′ sur cette droite la perpendiculaire O′A′, l'égalité $OC = R - R'$ donne $O'A' = AC = OA - OC = R'$.

Le problème n'est possible (**91**) *que* si $OO' \geqslant R - R'$, c'est-à-dire (**66**) *si les circonférences sont extérieures, tangentes extérieurement, sécantes ou tangentes intérieurement.* Dans les trois premiers cas, il admet deux solutions, puisqu'on peut mener deux tangentes du point O′ à la circonférence OC; dans le quatrième cas, une seule, qu'il y a lieu de considérer comme deux solutions confondues, puisque les deux tangentes menées du point O′ à la circonférence OC se confondent.

2° *Tangentes communes intérieures.* — Soit BB′ une tangente commune intérieure (*fig.* 93), B et B′ étant les points de contact. Par le point O′, menons encore la parallèle O′D à la tangente, jusqu'à rencontre en D avec le rayon OB. Le quadrilatère DBB′O′ étant un rectangle, de sorte que $BD = R'$, le point D appartient à la circonférence de centre O et de rayon $R + R'$. Nous décrirons donc cette circonférence et nous lui mènerons une tangente par le point O. Le point D étant ainsi déterminé, l'intersection du rayon OD avec la première circonférence donnée fournit le point B. La tangente en B est une tangente commune,

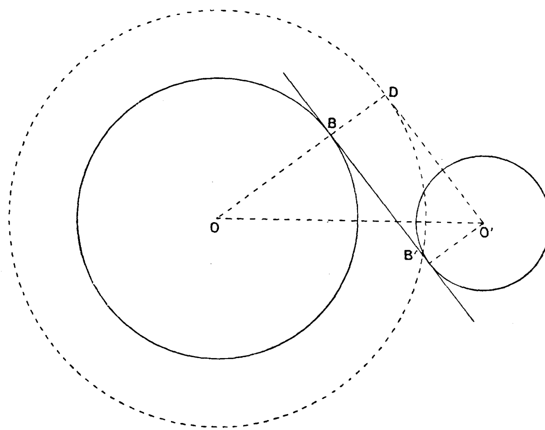


Fig. 93.

comme on le voit en reprenant le raisonnement que nous venons de faire en sens inverse.

Le problème n'est possible que si $OO' \geqslant R + R'$, c'est-à-dire *si les circonférences sont extérieures ou tangentes extérieurement.* Dans le premier cas, il admet deux solutions ; dans le second une seule (ou deux confondues).

En résumé :

Deux circonférences extérieures ont deux tangentes communes extérieures et deux intérieures ;

Deux circonférences tangentes extérieurement ont deux tangentes communes extérieures et une seule intérieure (la tangente en leur point de contact) ;

Deux circonférences sécantes ont deux tangentes communes extérieures ;

Deux circonférences tangentes intérieurement ont une tangente commune extérieure (la tangente en leur point de contact) ;

Deux circonférences intérieures n'ont aucune tangente commune.

94. Constr. 19. — *Construire les cercles tangents à trois droites.*

Le problème revient à celui-ci : *trouver les points équidistants des trois droites.* Un cercle ayant un tel point pour centre et la distance commune pour rayon répond à la question.

Or, le lieu géométrique des points équidistants de deux droites qui se coupent, se compose des deux bissectrices des angles qu'elles forment entre elles.

Supposons donc, tout d'abord, que les droites données se coupent deux à deux et ne passent pas par un même point, de sorte qu'elles formeront un triangle (*fig.* 94) dans lequel nous aurons à mener les bissectrices des angles intérieurs et extérieurs. Nous savons d'ailleurs : 1° que les bissectrices des angles intérieurs concourent en un même point ; 2° que la bissectrice d'un angle intérieur quelconque et les bissectrices des angles extérieurs non adjacents concourent en un même point. Les quatre points ainsi définis (le point de concours des bissectrices intérieures et les trois sommets du triangle formé par les bissectrices extérieures) sont donc les points cherchés, et ce sont les seuls.

Le premier des cercles qui ont pour centres respectifs ces quatre

points est situé à l'intérieur du triangle. On le nomme *cercle inscrit:* en général, une courbe est dite *inscrite* à un polygone lorsqu'elle est

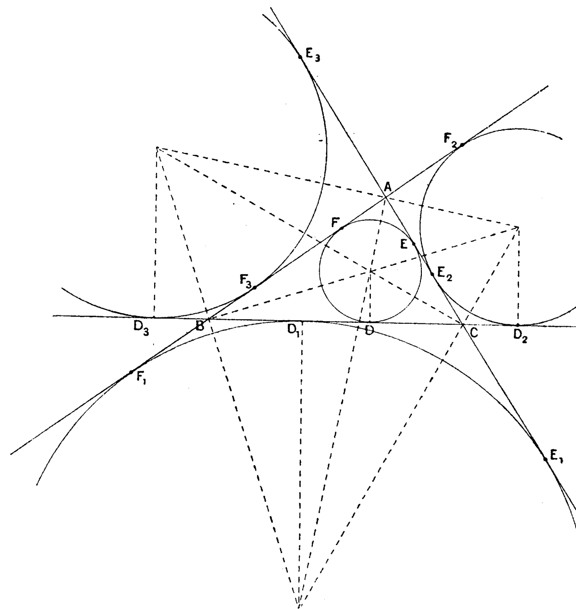


Fig. 94.

tangente à tous ses côtés. Les trois autres cercles, égalements tangents à tous les côtés, mais extérieurs au triangle, sont appelés cercles *ex-inscrits;* chacun d'eux est situé dans l'un des angles du triangle, mais séparé du sommet de cet angle par le côté opposé, comme l'indique la figure.

Si les trois droites concourent en un même point, il ne peut y avoir de solution proprement dite, puisque d'un point on ne peut mener que deux tangentes à un cercle. La construction précédente donne un cercle réduit à un point, le point de concours des droites données.

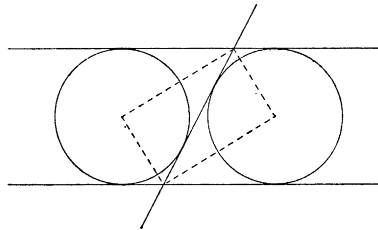


Fig. 95.

Lorsque deux des droites sont parallèles et la troisième sécante (*fig.* 95), les bissectrices des

angles formés par celle-ci avec les deux premières sont deux à deux parallèles. On n'obtient donc que deux cercles, situés de part et d'autre de la sécante.

Enfin, si les trois droites sont parallèles, il n'y a point de solution, puisqu'on ne peut mener à un cercle que deux tangentes de direction donnée.

EXERCICES

73. Construire un cercle de rayon donné :
— qui passe par deux points donnés.
— qui passe par un point donné et soit tangent à une droite donnée.
— qui soit tangent à deux droites données.
— qui soit tangent à une droite donnée et à un cercle donné.

74. Construire un cercle tangent à une droite donnée en un point donné et tangent à un cercle donné.

75. Mener, entre deux droites (ou circonférences) données, une droite de longueur et de direction données.

76. Mener, à un cercle donné, une tangente sur laquelle une droite donnée détermine un segment de longueur donnée.

77. Construire un triangle, connaissant un côté, l'angle opposé et une hauteur (distinguer deux cas, suivant que cette hauteur est ou non relative au côté donné).

78. Diviser une droite en trois parties égales, en employant le théorème du n° **55** *bis* sur les médianes d'un triangle.

79. Construire un triangle, connaissant
— deux côtés et une médiane (distinguer deux cas, suivant que la médiane donnée tombe sur l'un des côtés donnés ou est comprise entre eux);
— un côté et deux médianes (deux cas) ;
— les trois médianes.

80. Construire un triangle, connaissant un côté, une hauteur et une médiane (cinq cas).

81. Construire un triangle, connaissant un angle, une hauteur et une médiane (cinq cas).

82. Construire un triangle, connaissant un côté, l'angle opposé et la somme ou la différence des deux autres côtés.

83. Même problème, lorsque l'angle donné est adjacent au côté donné.

84. Construire un triangle, connaissant un angle, une hauteur et le périmètre (deux cas).

85. Construire un triangle, connaissant un côté, la différence des angles adjacents et la somme ou la différence des deux autres côtés.

86. Tracer la bissectrice de l'angle de deux droites qu'on ne peut prolonger jusqu'à leur point d'intersection.

THÉORÈMES SUR LES TANGENTES AU CERCLE (N° **92**).

87. Dans un quadrilatère circonscrit à un cercle (et comprenant le cercle à son intérieur), la somme de deux côtés opposés est égale à la somme des deux autres.

Réciproquement, tout quadrilatère convexe dans lequel les sommes des côtés opposés sont égales est circonscriptible à un cercle.

Lorsqu'on ne sait pas si le quadrilatère circonscrit contient le cercle à son intérieur, on peut toujours affirmer que la somme de deux côtés *convenablement choisis* est égale à la somme des deux autres. — Réciproque.

88. La circonférence tangente à trois côtés d'un quadrilatère et située du même côté de chacun d'eux que l'intérieur du polygone coupe ou ne coupe pas le quatrième côté, suivant que la somme de celui-ci et de son opposé est plus grande ou plus petite que la somme des deux autres côtés.

88 *bis*. Quand deux points sont extérieurs à un cercle, la droite qui les joint coupe ou ne coupe pas ce cercle, suivant qu'elle est plus grande ou plus petite que la somme des tangentes issues de ces points.

89. Le segment intercepté par deux tangentes fixes d'un cercle sur une tangente mobile est vu du centre sous un angle constant.

Cas où les deux tangentes fixes sont parallèles.

90. Si deux tangentes fixes d'un cercle sont coupées par une tangente mobile dont le point de contact est sur le plus petit des deux arcs déterminés par les points de contact des tangentes fixes, le triangle formé par les trois tangentes a un périmètre constant.

Que devient cet énoncé lorsque la tangente mobile a son point de contact sur le plus grand des deux arcs déterminés par les tangentes fixes?

90 bis. a, b, c étant les trois côtés d'un triangle ABC (*fig.* 94), p le demi-périmètre ($2p = a + b + c$) ; D, E, F les points de contact du cercle inscrit ; D_1, E_1, F_1 ; D_2, E_2, F_2 ; D_3, E_3, F_3 ceux des cercles ex-inscrits dans les angles A, B, C respectivement, les segments interceptés par ces points de contact sur les côtés ont pour valeurs :

$$\begin{aligned}
AE &= AF = CD_2 = CE_2 = BD_3 = BF_3 = p - a ;\\
BF &= BD = AE_3 = AF_3 = CE_1 = CD_1 = p - b ;\\
CD &= CE = BF_1 = BD_1 = AF_2 = AE_2 = p - c ;\\
AE_1 &= AF_1 = BF_2 = BD_2 = CD_3 = CE_3 = p.
\end{aligned}$$

91. Décrire, avec les sommets d'un triangle donné comme centres respectifs, trois cercles tangents entre eux deux à deux.

CHAPITRE VII

SUR LE DÉPLACEMENT DES FIGURES

95. Nous avons défini (**20**) deux figures égales et de même sens et reconnu (**50**) qu'une condition nécessaire et suffisante à cet effet était la possibilité de faire correspondre, à chaque point de la première figure un point *homologue* de la seconde, de manière que trois points quelconques et leurs homologues forment des triangles égaux et de même sens. Nous savons que si deux points coïncident avec leurs homologues respectifs, les deux figures coïncident. Autrement dit, *lorsqu'on sait qu'une figure F′ est égale à une figure donnée F, il suffit, pour la déterminer entièrement, de connaître les points* A′, B′ *homologues des deux points donnés* A, B *de F.*

En particulier, on doit, dans ces conditions, pouvoir *déterminer le point* C′ *homologue d'un point quelconque donné* C. Il suffit, en effet, de construire le triangle A′B′C′ égal au triangle ABC (Constr. 4) en choisissant, parmi les deux positions obtenues pour le troisième sommet, celle qui correspond à deux triangles de même sens.

96. L'opération appelée *translation* transforme toute figure en une figure égale et de même sens. Ce déplacement peut être considéré comme obtenu par un glissement de la figure dans son plan. Soit, en effet, la translation AA′ (*fig.* 96) qui transforme la figure F en la figure F′. M étant un point quelconque du plan, appelons F_M la figure qui dériverait de F par la translation AM. Si nous supposons que le point M aille par un chemin continu quelconque de la position A à la position A′, la figure F_M passera de la position F à la position F′ en restant invariable et sans sortir du plan.

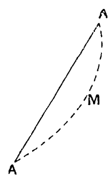


Fig. 96.

En particulier, le point M peut suivre la droite AA′, de sorte que

la translation peut être envisagée comme un déplacement continu dans lequel tous les points décrivent des droites parallèles et de même sens.

97. On nomme *rotation* un déplacement dans lequel chaque point de la figure déplacée tourne autour d'un certain point fixe, appelé *centre* de la rotation, dans un sens déterminé, d'un angle qui définit la *grandeur* de la rotation. Autrement dit, un point quelconque A de la figure primitive F étant donné, on en déduit le point correspondant A′ de la figure déplacée F′ en joignant le point A au centre O de la rotation, faisant avec OA (dans le sens de la rotation) un angle $\widehat{AOA'}$ égal à l'angle de rotation et prenant sur le second côté de cet angle une longueur OA′ égale à OA (*fig.* 97).

On voit qu'une rotation est déterminée quand on donne son centre, sa grandeur et son sens.

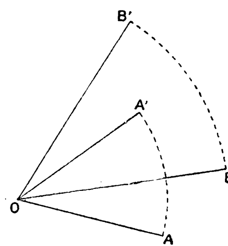


Fig. 97.

La figure F′, *qui résulte d'une figure* F *par une rotation quelconque, est égale à* F. Pour le démontrer, prenons deux points quelconques A, B (*fig.* 97) de F et soient A′, B′ leurs homologues. L'angle $\widehat{A'OB'}$ est égal à $\widehat{AOB}$ et de même sens. Si, en effet, je retourne sur lui-même l'angle $\widehat{BOA'}$, le côté OA′ venant sur OB, la nouvelle position de OA fera avec OB un angle égal à celui que fait OA′ avec OA et de même sens (puisqu'il dérive par retournement de l'angle que fait OA avec OA′); cette nouvelle position ne sera donc autre que OB′, de sorte que l'angle $\widehat{AOB}$ a bien coïncidé par retournement avec $\widehat{B'OA'}$.

Dès lors les triangles AOB, A′OB′, sont égaux et de même sens, comme ayant un angle égal compris entre côtés égaux chacun à chacun (OA = OA′; OB = OB′). Ceci ayant lieu quel que soit le point B, l'égalité des deux figures est établie (**50**).

Une rotation peut d'ailleurs s'obtenir par un glissement de la figure dans son plan, puisqu'on peut supposer que l'angle de rotation varie continûment depuis zéro jusqu'à la valeur qu'il doit prendre finalement. Dans ce mouvement, chaque point décrit un arc de cercle ayant pour centre le centre de la rotation. Ces diffé-

rents arcs correspondent à des angles au centre égaux; ils sont, avec les circonférences dont ils font respectivement partie, dans un même rapport.

98. Théorème. — *Dans deux figures égales qui dérivent l'une de l'autre par une rotation autour d'un point* O (*fig.* 98) :

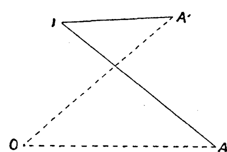


Fig. 98.

1° *Deux droites homologues, prises dans des sens homologues, font entre elles un angle égal à l'angle de rotation et de même sens ;*

2° *Le centre de rotation, deux points homologues quelconques* A, A' *et le point de concours* I *de deux droites homologues passant respectivement par ces points sont quatre points d'une même circonférence.*

1° La première partie du théorème est vraie, par définition, pour deux droites homologues passant par le centre de rotation; elle est, dès lors, vraie pour deux droites homologues quelconques, car on peut remplacer chacune d'elles par une droite parallèle et de même sens menée par le centre de rotation.

2° Les quatre points A, A', O, I sont sur une même circonférence, à savoir le lieu des sommets des angles égaux à l'angle de rotation et dont les côtés vont passer par les points A, A'.

99. Une rotation particulière est celle dont la grandeur est de deux angles droits ou 180°. Le point A' correspondant au point A se construit alors en joignant OA et prolongeant cette droite au delà du point O d'une longueur égale à elle-même. Le point A' ainsi défini est ce que l'on nomme le *symétrique* de A *par rapport au point* O. Ainsi, *en Géométrie plane*, la symétrie par rapport à un point et la rotation de 180° autour de ce point sont deux opérations identiques.

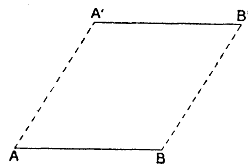


Fig. 99.

100. *Si, dans deux figures égales et de même sens, deux droites homologues* AB, A'B' (*fig.* 99) *sont parallèles et de même sens, les deux figures peuvent être amenées à coïncider par une translation.*

En effet, le quadrilatère ABA'B' étant un parallélogramme, AA' est

aussi parallèle à BB′, égale et de même sens : la translation AA′ amène donc les points A, B sur leurs homologues respectifs, ce qui entraîne la coïncidence complète des deux figures.

Si, dans deux figures égales et de même sens, un point O *coïncide avec son homologue, les deux figures peuvent être amenées à coïncider par une rotation autour de ce point.*

En effet, A et A′ étant deux points homologues quelconques, la rotation d'angle $\widehat{AOA'}$ autour du point O amène le point A en A′, tandis que le point O n'a pas cessé de coïncider avec son homologue.

101. Nous avons vu (**20**) que deux figures égales et de sens contraires ne peuvent pas être superposées sans que l'une d'elles sorte de son plan. Au contraire, deux figures égales et de même sens peuvent toujours être amenées à coïncider par un déplacement du plan, à savoir *une translation suivie d'une rotation*. Si, en effet, A et A′ sont deux points homologues des deux figures, la translation AA′ imprimée à la première fera coïncider ces deux points, après quoi une rotation autour du point A′ suffira (numéro précédent) pour achever la superposition.

En observant que la translation ne change pas les directions des droites, on en déduit que *deux droites homologues quelconques de deux figures égales et de même sens font entre elles un angle constant :* c'est ainsi qu'on peut parler de l'*angle des deux figures*.

102. Mais, des deux opérations précédentes (translation et rotation), on peut montrer qu'une seule est nécessaire. On a, en effet, le théorème suivant :

Théorème. — *Deux figures égales et de même sens peuvent toujours être amenées à coïncider, soit par une translation, soit par une rotation autour d'un point convenablement choisi.*

Ce point a reçu le nom de *centre de rotation*.

Démonstration. — Soient A, B deux points de la première figure ; A′, B′ leurs homologues dans la seconde. Nous ferons coïncider les deux figures si nous pouvons faire coïncider les segments AB, A′B′.

1° Si les droites AB, A′B′ sont parallèles et de même sens (*fig.* 99), les figures dérivent l'une de l'autre par translation ;

2° Supposons donc qu'il n'en est pas ainsi. Cherchons si les deux figures peuvent dériver l'une de l'autre par une rotation. Nous connaissons l'angle de cette rotation, égal à l'angle des deux figures, par exemple à l'angle des droites AB, A'B' (*fig.* 100).

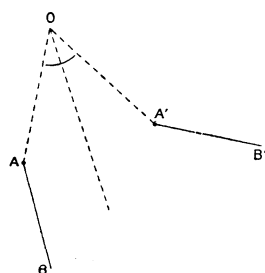


Fig. 100.

Nous devrons donc trouver un point O tel qu'une rotation ayant pour centre ce point et, pour angle, l'angle en question amène le point A sur le point A'. Or ceci revient à chercher le centre d'un segment de cercle décrit sur AA' comme base et capable d'un angle égal à la moitié de l'angle de rotation et de même sens (puisque l'angle au centre est double de l'angle inscrit qui intercepte le même arc).

Le point O se trouvera donc, d'une part, sur la perpendiculaire au milieu de AA'; d'autre part, sur la perpendiculaire à la tangente au segment de cercle, construite comme il est indiqué au n° **90** (Constr. 14).

Inversement, le point O étant ainsi déterminé, la rotation qui a ce point pour centre et, pour angle, l'angle des deux figures, amènera le point A sur le point A'; elle fera prendre à la droite AB une position parallèle à A'B' et de même sens, c'est-à-dire confondue avec elle, puisque l'extrémité A' est commune. Il y a donc superposition.

Remarque. — On aurait pu démontrer la même proposition en définissant le point O, soit par la rencontre des perpendiculaires élevées au milieu de AA' et de BB', soit (**98**) par la rencontre des circonférences circonscrites aux triangles IAA', IBB', le point I étant le point d'intersection de AB, A'B'. On établirait, dans l'un ou l'autre cas, que les triangles OAB, OA'B' sont égaux.

102 *bis*. Le théorème précédent résulte encore de la décomposition d'une translation ou d'une rotation quelconque en deux symétries.

Lemme. — *Deux symétries successives par rapport à deux droites* D_1, D_2 *équivalent :*

1° *Si les deux droites* D_1, D_2 *sont parallèles : à une translation perpendiculaire à la direction commune des deux droites et double de la translation qui amènerait la première droite sur la seconde;*

2° *Si ces deux droites sont concourantes : à une rotation ayant pour centre*

le point de concours et double de celle qui amènerait la première droite sur la seconde.

Démonstration. — Soient F une figure, F′ sa symétrique par rapport à D_1, F″ la symétrique de F′ par rapport à D_2.

1° Supposons les droites D_1, D_2 parallèles (*fig.* 101). M étant un point quelconque de F, nous en prendrons le symétrique M′ par rapport à D_1, en prolongeant d'une longueur égale à elle-même la perpendiculaire MH_1 abaissée de M sur D_1 ; puis nous prendrons le symétrique M″ de M′ par rapport à D_2, en prolongeant d'une longueur égale à elle-même la perpendiculaire $M'H_2$ abaissée de M′ sur D_2. On voit immédiatement que les trois points M, M′, M″ sont sur une même perpendiculaire commune à D_1, D_2. De plus, si l'on suppose pour fixer les idées, le point M′ entre D_1 et D_2, le segment MM″, égal à la somme de MM′ et de M′M″ (*fig.* 101), est double du segment H_1H_2 qui est la somme de $M'H_1$ et de $M'H_2$.

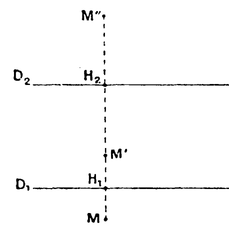


Fig. 101.

Cette conclusion subsisterait si le point M′ était extérieur aux deux parallèles D_1, D_2 : le segment MM″ serait alors la différence de MM′ et M′M″, et le segment H_1H_2 la différence de $M'H_1$, $M'H_2$. La translation représentée par un segment perpendiculaire aux deux droites et double de H_1H_2 amène donc bien un point quelconque de F′ sur son homologue de F″.

2° Supposons les deux axes de symétrie concourant en un point O (*fig.* 102), et soient encore M, M′, M″ trois points correspondants des trois figures F′, F′, F″, de sorte que les points M, M′ sont symétriques par rapport à D_1, les points M′, M″ par rapport à D_2. Les trois points M, M′, M″ sont évidemment sur une même circonférence de centre O. De plus l'angle MOM″, égal à la somme ou à la différence des angles MOM′, M′OM″, est double de l'angle de D_1 avec D_2, qui peut être considéré comme la somme ou la différence des angles que fait OM′ avec D_1 et avec D_2. La rotation définie dans l'énoncé amène donc bien chaque point M sur le point M″ correspondant.

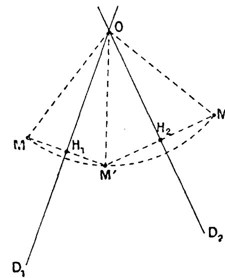


Fig. 102.

Remarque. — Deux symétries successives par rapport à une même droite se détruisent, chaque point revenant à sa position primitive.

Corollaire. — Inversement, *toute translation peut être remplacée par deux symétries successives par rapport à deux droites perpendiculaires à la direction de la translation, et dont l'une peut d'ailleurs être choisie arbitrairement ;*

Toute rotation peut être remplacée par deux symétries successives par rapport à deux droites passant par le centre de la rotation et dont l'une peut d'ailleurs être choisie arbitrairement.

Il suffit en effet, dans le cas de la translation, de mener la droite non prise arbitrairement à une distance de l'autre égale à la demi-translation; et, dans le cas de la rotation, de faire avec la droite choisie arbitrairement un angle égal à la demi-rotation.

103. Théorème. — *Des translations ou rotations successives, en nombre quelconque, peuvent se remplacer par une seule translation ou une seule rotation.*

C'est ce que l'on nomme *composer* ces déplacements : le déplacement final obtenu est dit le *résultant* des déplacements donnés.

Il suffit de savoir composer deux déplacements; car si l'on en avait trois, on commencerait par composer les deux premiers, puis le déplacement résultant avec le troisième; et l'on continuerait d'une façon tout analogue si les déplacements à composer étaient en nombre supérieur à trois.

D'ailleurs deux translations successives, remplaçant une droite quelconque par une droite parallèle et de même sens, équivalent à une translation unique (**100**).

Nous n'avons donc à nous occuper que d'une translation suivie ou précédée d'une rotation, ou de deux rotations.

Prenons, par exemple, le premier cas, en supposant, pour fixer les idées, que la translation soit effectuée la première. Cette translation peut être décomposée en deux symétries relatives à deux droites D_1, D_2, et de même la rotation en deux symétries relatives à deux droites D'_1, D'_2; de sorte que nous aurons à opérer en tout quatre symétries successives par rapport à D_1, D_2, D'_1, D'_2. Mais, la droite D_2 étant une droite arbitraire perpendiculaire à la translation, et la droite D'_1 une droite arbitraire passant par le centre de la rotation, nous pourrons les faire coïncider toutes deux avec la perpendiculaire à la translation menée par le centre de la rotation.

Dès lors, les symétries relatives à ces deux droites se détruiront et il ne restera plus que les deux symétries relatives à D_1, D'_2, lesquelles équivalent (numéro précédent) à une rotation ou à une translation unique.

Si l'on avait à composer deux rotations, on prendrait, tant pour la droite D_2 que pour la droite D'_1, la droite qui joint les deux centres donnés. Le théorème est donc démontré dans tous les cas.

Le théorème du n° **101** peut être regardé comme un corollaire de celui que nous venons d'établir, un déplacement quelconque d'une figure plane pouvant être obtenu par une translation suivie d'une rotation, savoir (A et A' étant deux points homologues quelconques de la figure primitive et de la figure déplacée) la translation AA' suivie d'une rotation de centre A' et

d'angle égal à l'angle des deux figures (*fig.* 103). Les droites D_2, D'_1 sont alors confondues avec la perpendiculaire à AA′ menée par le point A′; la droite D_1 sera par suite la perpendiculaire au milieu de AA′, et D'_2 s'obtiendra en faisant tourner D_2 autour du point A d'un angle égal à la demi-rotation. Le point de rencontre de D_1, D'_2 donnant le centre de la rotation, nous voyons que cette construction est entièrement conforme à celle qui a été donnée plus haut; car, en construisant (Constr. **14**) la tangente au segment de cercle décrit sur AA′ comme base et capable d'un angle égal à la demi-rotation, on trouve bien une perpendiculaire à D'_2.

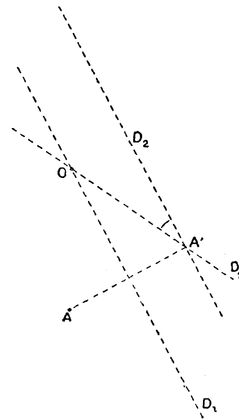


FIG. 103.

104. Théorème. — *Lorsqu'une figure invariable se déplace dans son plan, à chaque instant les normales aux trajectoires des différents points vont (si elles ne sont pas toutes parallèles) concourir en un même point,* que l'on nomme le *centre instantané de rotation.*

Écartant le cas où toutes les normales aux trajectoires des différents points M, N, P... de la figure mobile sont parallèles, nous supposerons que deux d'entre elles, les normales en M et N, par exemple, se coupent en un point O (*fig.* 104).

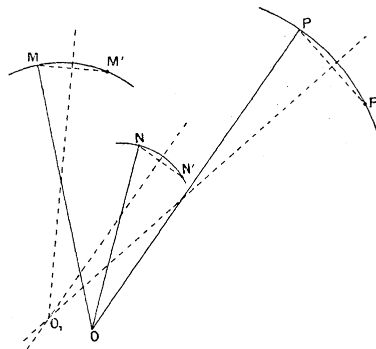


FIG. 104.

Considérons une seconde position de la figure mobile, voisine de la première, les nouvelles positions des points M, N, P... étant M′, N′, P′... Les perpendiculaires aux milieux de MM′, MN′, PP′... passent toutes par un même point O_1, le centre de la rotation qui amènerait la première position de la figure sur la seconde. Si maintenant l'on imagine que la seconde position se rapproche indéfiniment de la première, le milieu de MM′ aura pour limite le point M; et la droite MM′ elle-même, la tangente en M à la trajectoire de ce point; la perpendiculaire au milieu de MM′ tendra donc vers la normale à cette trajectoire. De même, la perpendiculaire au milieu de NN′ tendra vers la normale à la trajectoire de N. Le point O_1 a dès lors pour limite le point O, de sorte que les normales aux trajectoires de P..., qui sont les positions limites des perpendiculaires aux milieux de PP′..., passent bien [1] par ce point O.

[1] Nous admettons ici, à titre d'axiomes, des propositions telles que celles-ci: *Si un*

Corollaire. — *Si on sait trouver les tangentes aux trajectoires de deux points d'une figure invariable qui se meut, on peut trouver la tangente à la trajectoire d'un point quelconque de la figure.*

Car les perpendiculaires aux deux tangentes connues déterminent le centre instantané et, par suite, permettent de tracer la normale à la trajectoire d'un point quelconque.

EXERCICES

92. Si une figure invariable se déplace de manière que deux de ses droites passent chacune par un point fixe, il existe une infinité de droites de la figure qui, dans le déplacement, tournent également chacune autour d'un point fixe. Toute autre droite de la figure mobile reste tangente à un cercle fixe. — Le centre de rotation de deux positions quelconques de la figure est toujours sur un certain cercle fixe.

93. Étant données trois figures égales et de même sens F_1, F_2, F_3, on détermine les trois centres de rotation de ces figures prises deux à deux. Montrer que les angles du triangle qui a pour sommets ces trois points sont égaux aux moitiés des angles que font deux à deux les figures données, ou aux suppléments de ces moitiés.

94. Composer deux rotations de même angle, mais de sens contraires, autour de deux centres différents.

95. Deux figures égales, mais de sens contraires, peuvent toujours être amenées à coïncider :

1° D'une infinité de manières, par trois symétries ;

2° D'une infinité de manières, par une translation précédée ou suivie d'une symétrie ;

3° D'une manière et d'une seule, par une translation précédée ou suivie d'une symétrie par rapport à une droite parallèle à la translation.

96. Construire un triangle équilatéral ayant ses sommets respectivement sur trois parallèles données, ou sur trois circonférences concentriques données.

97. Trouver, sur une circonférence donnée, un arc, égal à un arc donné, tel que les droites joignant respectivement ses extrémités à deux points donnés, soient parallèles.

Plus généralement, trouver sur une circonférence donnée, un arc égal à un arc donné, tel que les droites joignant respectivement ses extrémités à deux points donnés fassent entre elles un angle donné.

point variable M_1 a pour limite un point fixe M, et qu'une direction variable D_1 ait pour limite une direction D, la parallèle menée par le point M_1 à la direction D_1 a pour limite la parallèle menée par le point M à D. — Si deux droites D_1, D'_1 ont les positions limites D, D', le point d'intersection de D_1, D'_1 tend vers le point d'intersection de D, D'. Etc. — En réalité, ces propositions sont des théorèmes qui doivent être démontrés ; mais nous en supprimons la démonstration, parce qu'elle ne pourrait être exposée avec la simplicité désirable, sans supposer, sur les limites, des notions qui relèvent des cours de calcul infinitésimal.

PROBLÈMES

PROPOSÉS SUR LE SECOND LIVRE.

98. On joint un point quelconque M d'une circonférence aux points de contact A, B des tangentes menées par un point P déterminé du plan. Par le point P on mène une parallèle à la tangente en M. Montrer que les droites MA, MB interceptent sur cette parallèle un segment dont la longueur est indépendante de la position du point M, et qui est divisé par le point P en deux parties égales.

99. Soient ABC un triangle équilatéral inscrit à un cercle et M un point de l'arc BC. Montrer que la droite MA est égale à MB + MC.

100. Par les trois sommets d'un triangle équilatéral, on mène trois droites telles que les bissectrices des angles que chacune d'elles forme avec la hauteur issue du même sommet soient parallèles. Montrer que ces trois droites concourent en un même point, situé sur le cercle circonscrit au triangle.

101. Les milieux des côtés d'un triangle, les pieds des hauteurs et les milieux des segments compris, sur chacune de celles-ci, entre le sommet dont elle est issue et le point de rencontre, sont neuf points d'une même circonférence (*cercle des neuf points*). Le centre de cette circonférence est le milieu de la droite qui joint le point de rencontre des hauteurs du triangle donné au centre du cercle circonscrit; son rayon est la moitié du rayon du cercle circonscrit. Déduire de là l'énoncé proposé plus haut, ex. 70.

101 *bis*. Dans tout triangle, la circonférence qui passe par les centres des trois cercles ex-inscrits a son centre à l'intersection des rayons qui, dans chacun de ces cercles, vont au point de contact avec le côté correspondant; ou encore, son centre est symétrique du centre du cercle inscrit par rapport au centre du cercle circonscrit. Son rayon est double de celui du cercle circonscrit.

102. Dans tout triangle, les pieds des perpendiculaires abaissées, du pied de la hauteur relative à chacun des côtés, sur les deux autres, sont six points d'une même circonférence.

103. Dans un triangle ABC, la perpendiculaire au milieu du côté BC et la bissectrice de l'angle A se coupent sur le cercle circonscrit. Leur point d'intersection est à égale distance des points B, C, du centre du cercle inscrit et du centre du cercle ex-inscrit dans l'angle A. — Théorème analogue pour la bissectrice de l'angle extérieur en A.

En conclure que la somme des rayons des cercles ex-inscrits est égale au rayon du cercle inscrit, plus quatre fois le rayon du cercle circonscrit.

103 *bis*. Construire un triangle, connaissant la hauteur, la médiane et la bissectrice issues d'un même sommet et limitées au côté opposé.

104. Deux tangentes d'un cercle et leur corde de contact divisent en deux parties égales la perpendiculaire menée, par un point quelconque de cette dernière, à la droite qui joint ce point au centre.

105. Sur les trois côtés d'un triangle ABC, on construit, extérieurement au triangle, les triangles équilatéraux BCA′, CAB′, ABC′ et l'on joint AA′, BB′, CC′. Démontrer :

1° Que ces droites sont égales entre elles;

2° Qu'elles se coupent en un même point, d'où l'on voit les trois côtés sous le même angle;

3° Que si ce point est intérieur au triangle, la somme de ses distances aux trois sommets est égale à la longueur commune des droites AA′, BB′, CC′. (Ex. 99).

106. Les cercles circonscrits aux quatre triangles que forment entre elles quatre droites qui se coupent deux à deux passent par un même point O (démontrer ce théorème : 1° directement; 2° en utilisant l'exercice 72). — Les centres de ces cercles sont sur une même circonférence, qui passe également par ce même point O.

107. Les bissectrices des angles que l'on forme en prolongeant jusqu'à leur rencontre les côtés opposés d'un quadrilatère inscriptible sont perpendiculaires entre elles. Elles sont respectivement parallèles aux bissectrices des angles que forment entre elles les diagonales du même quadrilatère. — Réciproque.

107 *bis*. Deux circonférences quelconques étant coupées par deux droites quelconques, les cordes qui joignent deux à deux les points d'intersection des deux droites avec la première circonférence coupent les cordes qui joignent deux à deux les points d'intersection des mêmes droites avec la seconde circonférence en quatre points d'un même cercle.

108. Étant donné un triangle ABC, quel est le lieu des points M tels que les perpendiculaires menées respectivement des sommets A, B, C aux droites AM, BM, CM soient concourantes ?

109. Lieux des sommets des rectangles considérés dans l'exercice 44, lorsque le parallélogramme donné est *articulé*, c'est-à-dire varie de manière que les longueurs de ses côtés restent constantes, l'un de ces côtés restant fixe.

110. Sur deux segments consécutifs AB, BC d'une droite, on décrit deux circonférences variables, mais toujours égales entre elles. Ces circonférences se coupent au point B et en un second point dont on demande le lieu.

111. Soient OA, OB deux rayons rectangulaires mobiles d'un cercle O. Par les points A, B respectivement, on mène des parallèles à deux directions rectangulaires fixes. Lieu du point où se coupent ces deux droites, lorsque l'angle droit AOB tourne autour du centre.

112. Deux cercles, dont chacun touche une droite fixe en un point fixe, varient en restant constamment tangents entre eux. Trouver le lieu de leur point de contact

113. Lieu décrit par le sommet de l'angle droit d'un triangle rectangle invariable, lorsque les deux autres sommets glissent sur deux droites rectangulaires.

114. Tracer une droite sur laquelle deux circonférences données interceptent des cordes de longueurs données.

115. Inscrire, dans une circonférence donnée, un triangle dont les trois côtés soient parallèles à des directions données; ou dont deux côtés soient parallèles à des directions données et dont le troisième côté passe par un point donné.

116. Étant donnés une droite xy et deux points A, B, trouver sur la droite un point M tel que l'angle $\widehat{AMx}$ soit double de l'angle $\widehat{BMy}$.

117. Construire un pentagone (ou, en général, un polygone d'un nombre impair de côtés), connaissant les milieux des côtés.

Qu'arrive-t-il dans le cas d'un polygone d'un nombre pair de côtés ?

118. Construire un trapèze, connaissant les quatre côtés.

Plus généralement, construire un quadrilatère, connaissant les quatre côtés et l'angle que font deux côtés opposés prolongés (1).

119. Couper les côtés AB, AC d'un triangle par une sécante de direction donnée, qui intercepte sur ces côtés, à partir des sommets B, C respectivement, des segments égaux.

120. Tracer, à deux parallèles données, une perpendiculaire commune qui soit vue d'un point donné sous un angle donné.

121. On donne un cercle, deux points P, Q de ce cercle et une droite. Trouver sur la circonférence un point M tel que les droites MP, MQ interceptent sur la droite donnée un segment IK de longueur donnée.

122. Même problème quand on donne, non la longueur du segment IK, mais le milieu de ce segment.

123. Construire un carré dont les côtés passent par quatre points donnés. — Le problème peut-il admettre une infinité de solutions ? Quel serait alors le lieu des centres des carrés répondant à la question ?

(1) Sur cet exercice et les suivants, voir note A, n° **284**.

LIVRE III

DE LA SIMILITUDE

CHAPITRE PREMIER

LIGNES PROPORTIONNELLES

105. On sait [1] que l'on appelle *proportion* l'égalité de deux rapports et que deux grandeurs sont dites *proportionnelles* lorsque leurs valeurs se correspondent de manière que le rapport de deux valeurs quelconques de la première soit égal aux rapports des valeurs correspondantes de la seconde. Ainsi, les deux lignes AB, CD seront dites proportionnelles à A′B′, C′D′ si l'on a $\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}$.

106. Dans l'égalité précédente, $\frac{AB}{CD}$ désigne le rapport des deux *lignes* AB et CD; mais nous appliquerons encore, ici et dans tout ce qui va suivre, la convention formulée au n° **69** et, ayant choisi d'une façon quelconque, mais une fois pour toutes, une unité de longueur, nous remplacerons les lignes elles-mêmes par les *nombres* qui les mesurent : ainsi, $\frac{AB}{CD}$ voudra dire $\frac{\text{mesure de AB}}{\text{mesure de CD}}$. Nous avons le droit d'opérer ainsi, car nous n'avons nullement changé par cette substitution la valeur du rapport, d'après un théorème déjà rappelé (livre II, n° **68**, 2°).

(1) Voir les *Leçons d'Arithmétique* de M. Tannery, chap. VI et XIII.

Nous pourrons, dès lors, appliquer aux rapports des lignes les propriétés démontrées en arithmétique [1] pour les rapports des nombres, telles que les suivantes :

On ne change pas un rapport en multipliant ou divisant les deux termes par une même quantité;

Pour multiplier deux rapports, on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux;

Dans une suite de rapports égaux, la somme des numérateurs est à la somme des dénominateurs comme un numérateur est à son dénominateur; etc.

Et aux proportions entre lignes les propriétés des proportions entre nombres, telles que les suivantes :

Dans toute proportion :

Le produit des extrêmes est égal au produit des moyens;

On peut intervertir l'ordre des extrêmes ou celui des moyens;

La somme (ou la différence) des termes du premier rapport est à l'un d'entre eux comme à la somme (ou la différence) des termes du second rapport à l'un d'entre eux;

Réciproquement, chacune des égalités ainsi obtenues entraîne la proportion primitive; etc.

Ainsi, l'égalité $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ est équivalente aux suivantes :

$$ad = bc, \qquad \frac{a}{c} = \frac{b}{d}, \qquad \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}, \qquad \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}, \quad \ldots$$

c'est-à-dire que chacune de ces égalités entraîne toutes les autres.

En particulier, si l'on sait que les trois points en ligne droite

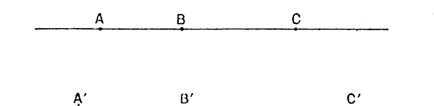


Fig. 105.

A, B, C (*fig.* 105) se succèdent dans le même ordre que les trois points en ligne droite A', B', C', les proportions

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}, \qquad \frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}, \qquad \frac{AC}{BC} = \frac{A'C'}{B'C'}$$

sont équivalentes les unes aux autres.

(1) *Leçons d'Arithmétique*, chap. VI.

Nous rappellerons aussi que *l'on peut, connaissant trois termes d'une proportion, en déduire le terme non connu :* la proportion $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ donne, si l'on suppose donnés a, b et c :

$$d=\frac{b\times c}{a}.$$

Ce terme d est dit *quatrième proportionnel* à a, b, c.

On voit que, *dans deux proportions qui ont trois termes homologues communs, les quatrièmes termes sont égaux.*

107. On dit qu'un nombre b est *moyen proportionnel* (ou *moyen géométrique*) entre deux autres, si l'on peut écrire la proportion qui a pour extrêmes a et c et dont les deux moyens sont égaux à b :

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}.$$

Cette égalité est équivalente à

$$b^2=ac,$$

de sorte que *pour trouver un moyen proportionnel entre deux nombres, a et c, il faut extraire la racine carrée du produit de ces deux nombres.* Le nombre c est dit *troisième proportionnel* à a et b.

Bien entendu, conformément aux conventions précédentes, nous dirons qu'une ligne b est *moyenne proportionnelle* ou moyenne géométrique entre deux autres a et c si le nombre qui mesure b est moyen proportionnel entre les mesures de a et de c, c'est-à-dire si l'on peut écrire entre les trois mesures (ou, ce qui revient au même, entre les trois lignes) la proportion $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$.

108. *Il existe un point, et un seul, qui divise un segment donné dans un rapport donné.*

Soient, en effet, AB (*fig.* 106) le segment donné, r le rapport donné. On cherche un point M tel que $\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{BM}}=r$: ce qui peut s'écrire sous forme d'une proportion

$$\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{BM}}=\frac{r}{1}$$

et, dès lors, est équivalent à

$$\frac{AM}{AB} = \frac{r}{1+r},$$

proportion qui est vérifiée pour une valeur de AM, et une seule :

$$AM = AB \cdot \frac{r}{1+r}.$$

Le segment ainsi déterminé est plus petit que AB. En le portant sur AB à partir du point A, on obtiendra le point M répondant à la question.

C. Q. F. D.

109. Considérons un point M qui se déplace sur la droite AB en allant du point A vers le point B. Le rapport $\frac{AM}{BM}$ va constamment en croissant, puisque le numérateur croît, tandis que le dénominateur décroît. Il peut, d'ailleurs, prendre n'importe quelle valeur donnée, d'après la proposition précédente, en particulier des valeurs aussi petites qu'on le veut (lorsque le point M est suffisamment voisin de A) et des valeurs aussi grandes qu'on le veut (lorsque le point M est suffisamment voisin de B). En un mot, ce rapport, parti de o, croît constamment et au delà de toute limite lorsque le point M va de A en B.

110. Étudions maintenant le rapport $\frac{AM'}{BM'}$, le point M' (*fig.* 106)

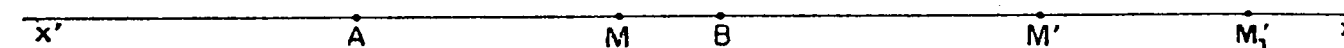


Fig. 106.

étant sur un des prolongements de AB. Le rapport $\frac{AM'}{BM'}$ est alors dit le rapport dans lequel le point M' *divise extérieurement* le segment AB.

Il existe un point, et un seul, qui divise extérieurement un segment de droite donnée dans un rapport donné quelconque, pourvu que ce rapport soit différent de 1.

Soit en effet à chercher, sur les prolongements de AB, un point M'

tel que le rapport $\frac{AM'}{BM'}$ soit égal à un nombre donné r. Supposons, pour fixer les idées, $r > 1$, auquel cas nous devrons chercher le point M′ sur la droite AB prolongée du côté du point B. La proportion $\frac{AM'}{BM'} = \frac{r}{1}$ est équivalente à

$$\frac{AM'}{AB} = \frac{r}{r-1},$$

qui est vérifiée par une valeur de AM′, et une seule

$$AM' = AB\frac{r}{r-1}.$$

Ce segment est plus grand que AB (puisque $\frac{r}{r-1}$ est plus grand que 1). En le portant à partir du point A dans le sens AB, on aura le point M′ qui répond à la question.

Si le rapport r était plus petit que 1, un raisonnement tout semblable donnerait

$$AM' = AB\,\frac{r}{1-r},$$

segment qu'il faudrait à partir du point A, dans le sens opposé à AB, pour obtenir le point M′. La proposition est donc démontrée.

Considérons un point M′ qui, partant de B, s'éloigne indéfiniment dans la direction Bx (*fig.* 106). Le rapport $\frac{AM'}{BM'}$ est plus grand que 1. Lorsque le point, en s'éloignant, passe de la position M′ à la position M'_1, ce rapport se rapproche de 1, puisqu'on passe du rapport $\frac{AM'}{BM'}$ au rapport $\frac{AM'_1}{BM'_1}$ en ajoutant la même quantité $M'M'_1$ aux deux termes [1]. D'ailleurs, il peut prendre toutes les valeurs (supérieures à 1), en particulier des valeurs aussi grandes qu'on veut (lorsque M′ est suffisamment voisin de B) et des valeurs aussi voisines qu'on le veut de 1 (lorsque M′ est suffisamment éloigné). En un mot, *le rapport* $\frac{AM'}{BM'}$ *part de l'infini, décroît constamment et*

(1) Voir Tannery, *Leçons d'Arithmétique*, chap. VI, n° 212.

tend vers 1, *lorsque le point* M′ *part de* B *et s'éloigne indéfiniment dans la direction* Bx.

On voit de même que *si le point* M′ *part de* A *et s'éloigne indéfiniment dans la direction de* Ax' (*fig.* 106), *le rapport* $\frac{AM'}{BM'}$ *part de* o, *croît constamment et tend vers* 1.

111. Définition. — Deux points C, D, (*fig.* 107) qui divisent, l'un intérieurement, l'autre extérieurement, un même segment AB dans le même rapport, sont dits *conjugués harmoniques* par rapport à ce segment (on dit encore qu'ils *divisent harmoniquement* ce segment).

Si un segment CD *divise harmoniquement un segment* AB, *réciproquement celui-ci divise harmoniquement le premier.* Car la proportion $\frac{CA}{CB}=\frac{DA}{DB}$ donne par inversion des moyens : $\frac{CA}{DA}=\frac{CB}{DB}$.

Tout point pris sur un segment donné AB ou sur un de ses prolongements a un conjugué harmonique par rapport à ce segment, à l'exception du milieu I de AB (le rapport $\frac{AI}{IB}$ étant égal à 1) [1]. *Deux segments qui se divisent harmoniquement empiètent toujours l'un sur l'autre* (c'est-à-dire ne sont ni entièrement extérieurs, ni entièrement intérieurs l'un à l'autre).

112. Au contraire, *deux segments* CD, C′D′ *qui divisent harmoniquement un même troisième* AB *sont, ou entièrement extérieurs, ou entièrement intérieurs l'un à l'autre.*

Si, en effet, les rapports $\frac{CA}{CB}$ et $\frac{C'A}{C'B}$ sont, l'un plus grand, l'autre plus petit que 1, les segments sont extérieurs l'un à l'autre : ils sont de côtés différents du milieu I de AB. S'il n'en est pas ainsi

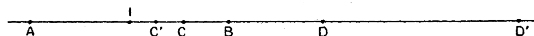


Fig. 107.

(*fig.* 107) et que, par exemple, les deux rapports dont nous venons

(1) Le conjugué du point I doit être considéré comme rejeté à l'infini. On entend par là que, lorsque le point M s'éloigne indéfiniment, le rapport $\frac{AM}{MB}$ tend vers 1, qui est la valeur de $\frac{AI}{IB}$.

de parler soient tous deux plus grands que 1, les deux segments CD, C′D′ seront du même côté du point I et comprendront tous deux le point B. Mais la discussion des nos **109-110** prouve que le rapport $\frac{AM}{MB}$ se rapproche de 1 quand on s'éloigne du point B dans un sens ou dans l'autre (du moins quand on ne dépasse pas le point I). Donc celui des deux segments qui correspond au rapport le plus voisin de 1 comprend l'autre à son intérieur.

113. Théorème fondamental. — *Deux sécantes quelconques sont coupées en parties proportionnelles par des droites parallèles.*

Soient les deux sécantes ABCD, A′B′C′D′, coupées par les parallèles AA′, BB′, CC′, DD′. Les points A′, B′, C′, D′, se succèdent dans le même ordre que les points A, B, C, D (le contraire exigeant que deux des droites AA′, BB′, CC′, DD′ se coupent). Je dis que l'on a $\frac{CD}{AB} = \frac{C'D'}{A'B'}$.

Nous distinguerons deux cas :

1° *Si les segments* AC, CD *sont égaux* (*fig.* 108), *il en est de même de* A′B′, C′D′. En effet, par le point B menons à A′B′ la parallèle B*b* jusqu'à rencontre en *b* avec AA′ et, par le point D, la parallèle D*d* jusqu'à rencontre en *d* avec CC′. Si AB = CD, les deux triangles AB*b*, CD*d* sont égaux comme ayant un côté égal AB = CD adjacent à deux angles égaux chacun à chacun comme correspondants. On a donc B*b* = D*d*. Or B*b* et D*d* sont respectivement égaux à A′B′, C′D′, ainsi que cela se voit dans les parallélogrammes B*b*A′B′, D*d*C′D′.

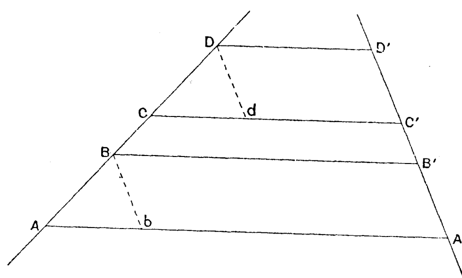


Fig. 108.

2° *Cas général* (1). — Les points A, B, C, D étant quelconques,

(1) La démonstration est terminée si l'on part du théorème d'arithmétique déjà rappelé. (Voir *Leçons d'Arithmétique* de M. Tannery, chap. XIII, n° 493) : *Deux grandeurs sont proportionnelles si : 1° à une même valeur de la première correspond toujours une même valeur de la seconde; et 2° à la somme de deux valeurs de la première, la somme des deux valeurs correspondante*

nous allons démontrer que les valeurs à $\frac{1}{n}$ près des deux rapports $\frac{CD}{AB}$ et $\frac{C'D'}{A'B'}$ sont égales, quel que soit n.

Soit, par exemple, $n = 5$: divisons AB en cinq parties égales aux points 1, 2, 3, 4 (*fig.* 109) et supposons que la cinquième partie de AB soit contenue deux fois, mais non trois dans CD : soient I, II, III les extrémités de trois segments égaux au cinquième de AB et portés successivement sur la droite CB à partir du point C ; de sorte que les points I et II sont entre C et D (le dernier pouvant toutefois coïncider avec C), le point III au delà du point D. Par tous ces points 1, 2, 3, 4, I, II, III, menons des parallèles à la direction commune des droites AA′, BB′, CC′, DD′, jusqu'à rencontre en 1′, 2′, 3′, 4′, I′, II′, III′, avec la droite A′B′C′D′. Nous avons ainsi divisé A′B′ en cinq parties égales et porté trois fois l'une de ces parties à partir du point C′ dans la direction C′D′ (1°). Les points I′, II′ étant dans l'intervalle C′D′ et le point III′ au delà du point D′ (d'après la remarque faite tout d'abord) le théorème est démontré.

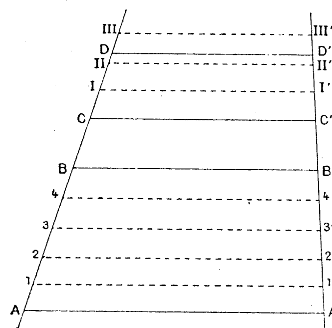


Fig. 109.

114. Théorème. — *Une parallèle* DE *à l'un des côtés d'un triangle* ABC *partage les deux autres côtés* AB, AC *en parties proportionnelles* (*fig.* 110).

En effet, si par le sommet A nous menons une parallèle xy à BC, le théorème précédent nous

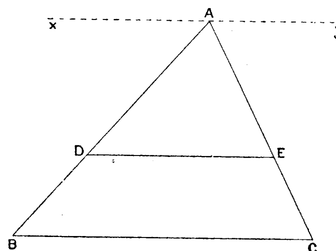


Fig. 110.

de la seconde. La première condition est vérifiée, ainsi qu'il est démontré dans le texte (1°), la seconde l'est évidemment, moyennant la remarque que les points homologues se succèdent dans le même ordre sur les deux droites ABCD, A′B′C′D′. Dans le texte, nous reproduisons la démonstration du théorème d'arithmétique, en l'adaptant au cas particulier qui nous occupe.

prouve que les parallèles BC, DE, xy divisent les sécantes AB, AC en parties proportionnelles.

Remarque. — La division dont il s'agit peut être intérieure ou extérieure ; mais elle est de même nature sur les deux côtés.

Réciproque. — *Si une droite divise deux côtés d'un triangle en parties proportionnelles, elle est parallèle au troisième côté.*

Soit la droite DE qui divise les côtés AB et AC en parties proportionnelles (*fig.*) 111. Par le point D, menons une parallèle BC, et soit E′ le point où cette parallèle coupe AC. Le rapport $\frac{AE'}{E'C}$ est égal au rapport $\frac{AD}{DB}$ (théor. précéd.), et par suite au rapport $\frac{AE}{EC}$ (hypothèse). Les points E, E′ coïncident donc (**108**) et DE est parallèle à BC.

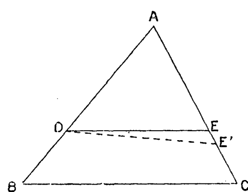


Fig. 111.

115. Théorème. — *Dans tout triangle :*

1° *La bissectrice d'un angle quelconque partage le côté opposé en parties proportionnelles aux côtés adjacents ;*

2° *La bissectrice d'un angle extérieur détermine de même sur le côté opposé deux segments proportionnels aux côtés adjacents.*

1° Soit la bissectrice AD de l'angle A du triangle ABC (*fig.* 112).

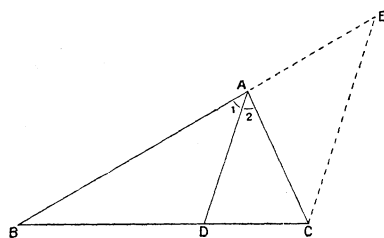


Fig. 112.

Je veux démontrer que $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$.

A cet effet, menons la parallèle CE à AD jusqu'à rencontre en E avec AB. On a, dans le triangle BAD coupé par la parallèle CE à AD,

$$\frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AE}.$$

Mais le triangle ACE a ses deux angles en C et en E égaux, comme égaux respectivement aux deux moitiés A_1, A_2 de l'angle en A ($E = A_1$ comme correspondants ; $C = A_2$ comme alternes internes) ; il est donc isoscèle, et l'on peut, dans la proportion précédente, remplacer AE par AC : d'où la proposition énoncée.

2° La bissectrice AF de l'angle extérieur en A (*fig.* 113) du

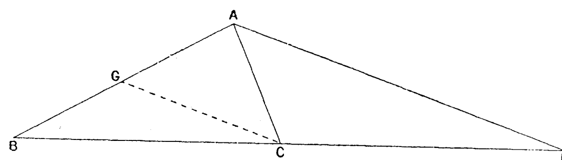


FIG. 113.

triangle ABC rencontre le côté BC en F (du moins si le triangle n'est pas isoscèle). Nous voulons démontrer que $\frac{BF}{CF} = \frac{AB}{AC}$.

La démonstration est tout à fait semblable à la précédente. On mènera par le point C une parallèle CG à AF et on remarquera : 1° que les parallèles CG, AF nous donnent $\frac{BF}{CF} = \frac{BA}{AG}$; 2° que le triangle ACG est isoscèle (comme ayant les angles en C et G égaux respectivement aux deux moitiés de l'angle extérieur en A et, par suite, égaux entre eux), ce qui permet de remplacer AG par AC.

REMARQUE. — On voit que *la bissectrice d'un angle d'un triangle et la bissectrice de l'angle extérieur adjacent divisent harmoniquement le côté opposé.*

Réciproque. — 1° *Si une droite issue d'un sommet d'un triangle divise intérieurement le côté opposé en parties proportionnelles aux côtés adjacents, elle est bissectrice de l'angle au sommet ;*

2° *Si une droite issue d'un sommet d'un triangle divise extérieurement le côté opposé en parties proportionnelles aux côtés adjacents, elle est la bissectrice de l'angle extérieur correspondant.*

Car il n'y a (**108**) qu'un seul point qui divise intérieurement le côté BC (*fig* 112) en parties proportionnelles aux côtés adjacents, et c'est le pied de la bissectrice de l'angle en A. De même, il n'y a (**110**) qu'un seul point qui divise extérieurement le côté BC en

parties proportionnelles aux côtés adjacents, et c'est le pied de la bissectrice de l'angle extérieur en A.

116. Théorème. — *Le lieu géométrique des points dont les distances à deux points fixes sont dans un rapport donné* (*différent de* 1) *est une circonférence.*

Soient A, B (*fig.* 114) les deux points donnés : cherchons le lieu des points M tels que $\frac{MA}{MB}$ soit égal à un nombre donné m.

Il existe deux points du lieu, l'un C sur le segment AB, l'autre D sur son prolongement : ce sont les points dont nous avons reconnu l'existence aux n^os^ **108-110**. Soit alors un point quelconque M du lieu cherché. La droite MC, qui divise AB en parties CA, CB, proportionnelles à MA, MB, est bissectrice de l'angle en M du triangle AMB. La droite MD, qui divise extérieurement le côté AB de ce triangle en parties proportionnelles aux côtés adjacents, est bissectrice de l'angle extérieur en M. Ces deux droites sont donc rectangulaires (liv. I, **17**) et par suite le point M appartient à la circonférence **C** décrite sur CD comme diamètre (liv. II, **78**).

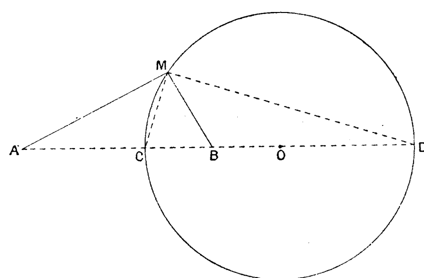


Fig. 114.

Réciproquement, supposons le point M sur la circonférence **C**. Menons par M une droite MA′, symétrique de MB par rapport à MC, et soit A′ le point où elle coupe AB. Les droites MC, MD étant les bissectrices de l'angle A′MB et de son supplément, le point A′ est le conjugué de B par rapport au segment CD (**115**, Remarque) : il coïncide donc avec A. Les droites MC, MD étant les bissectrices de l'angle AMB et de son supplément, on a bien $\frac{MA}{MB} = \frac{CA}{CB} = m$

C. Q. F. D.

Corollaire. — *Si l'on divise harmoniquement un diamètre d'un cercle en deux points* A *et* B, *le rapport des distances d'un point quelconque du cercle aux deux points* A *et* B *est constant.*

EXERCICES

124. Sur deux droites fixes, on prend, à partir de deux points fixes A, B situés respectivement sur ces deux droites, deux segments AM, BN qui varient proportionnellement l'un à l'autre et, par les points M, N respectivement, on mène des parallèles à deux directions données. Trouver le lieu du point d'intersection de ces deux parallèles.

125. Deux cordes issues d'un même point d'une circonférence divisent harmoniquement le diamètre perpendiculaire à la droite qui joint leurs extrémités non communes.

126. Dans quelle région du plan sont situés les points tels que le rapport de leurs distances à deux points donnés A, B soit plus grand qu'un nombre donné (n^os **112, 66**)?

127. Trouver un point dont les distances aux sommets d'un triangle soient proportionnelles à trois nombres donnés.

Le problème, lorsqu'il est possible, a en général deux solutions. Montrer que les deux points qui répondent à la question sont sur un même diamètre du cercle circonscrit au triangle donné et divisent harmoniquement ce diamètre.

128. Par un point commun A de deux circonférences, on mène une sécante mobile qui coupe à nouveau les circonférences en M, M′. Lieu du point qui divise MM′ dans un rapport donné (Ex. 65).

CHAPITRE II

SIMILITUDE DES TRIANGLES

117. Définition. — Deux triangles sont dits *semblables* quand ils ont les angles égaux et les côtés homologues proportionnels.

Remarques. — Deux triangles égaux sont, par cela même, semblables. Deux triangles semblables à un même troisième sont semblables entre eux : en particulier, si deux triangles sont semblables, tout triangle égal au premier est semblable au second.

Théorème. — *Toute parallèle à l'un des côtés d'un triangle forme avec les deux autres côtés un triangle semblable au premier.*

Soit la parallèle DE au côté BC d'un triangle ABC (*fig.* 115). Je dis que le nouveau triangle ADE est semblable au triangle ABC.

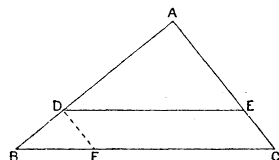


Fig. 115.

En premier lieu, les angles des deux triangles sont égaux chacun à chacun, l'angle en A étant commun et les angles D,E étant respectivement correspondants de B, C.

En second lieu, on a (**114**) $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ et il nous reste donc seulement à prouver que la valeur commune de ces deux rapports est égale à $\frac{DE}{BC}$.

Pour cela, nous mènerons par le point D une parallèle DF à AC, de manière à former le parallélogramme DEFC.

La droite DF coupant les côtés BA, BC en segments proportionnels, on a $\frac{DE}{BC} = \frac{FC}{BC} = \frac{AD}{AB}$.

C. Q. F. D.

Remarque. — La droite DE peut être intérieure au triangle (*fig.* 115) ou extérieure (*fig.* 116 et 117) sans que la démonstration cesse de

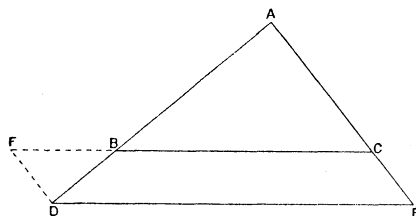


Fig. 116.

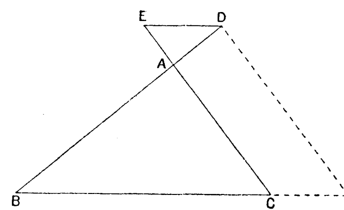


Fig. 117.

s'appliquer. Toutefois, dans le cas de la figure 117, les angles homologues non communs des deux triangles sont égaux, non comme correspondants, mais comme alternes-internes.

118. Les propositions suivantes, connues sous le nom de *cas de similitude des triangles*, donnent des conditions nécessaires et suffisantes pour que deux triangles soient semblables.

Premier cas de similitude. — *Deux triangles sont semblables s'ils ont deux angles égaux chacun à chacun.*

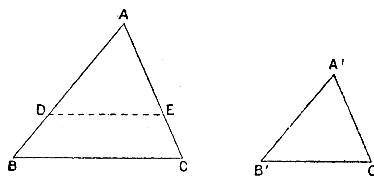


Fig. 118.

Soient les deux triangles ABC, A'B'C', dans lesquels on a A = A', B = B' (*fig.* 118). Je porte sur AB une longueur AD = A'B' et, par le point C, je mène une parallèle DE à BC. Le triangle ADE est semblable à ABC (théor. préc.) ; il est d'ailleurs égal à A'B'C', comme étant équiangle et ayant un côté égal.

Deuxième cas. — *Deux triangles sont semblables s'ils ont un angle égal compris entre côtés proportionnels.*

Soient les deux triangles ABC, A'B'C', dans lesquels on a A = A', $\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$ · Prenons sur AB une longueur AD = A'B' et menons la parallèle DE à BC. Le triangle ADE est semblable à ABC. Il est égal à A'B'C' comme ayant un angle égal (A = A') compris entre côtés égaux chacun à chacun : AD est effectivement égal à A'B' par construction, et les deux proportions $\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$ (hypothèse) et $\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE}$, qui ont trois termes communs, nous donnent A'C' = AE.

Troisième cas. — *Deux triangles sont semblables quand ils ont les trois côtés proportionnels.*

Soient les deux triangles ABC, A'B'C', qui ont $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$. Portons sur AB une longueur AD = A'B' et menons la parallèle DE à BC. Le triangle ADE, semblable à ABC, est égal à A'B'C' comme ayant les trois côtés égaux chacun à chacun. En effet AD = A'B' par construction et les proportions $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$ et $\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DE}$ (nº préc.) qui ont respectivement trois termes communs avec les proportions, données dans l'hypothèse, $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$, $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$, nous donnent bien AE = A'C', DE = B'C'.

Remarque.—La définition des triangles semblables comprend cinq

conditions : trois données par l'égalité des angles chacun à chacun, deux par la proportionnalité des côtés. Le corollaire III du n° **44** (Livre I) montre qu'on peut supprimer l'une des trois premières conditions, ce qui réduit à quatre le total.

Mais les cas de similitude que nous venons de démontrer nous font voir qu'il suffit, pour la similitude, de *deux* (convenablement choisies) des cinq conditions primitives.

119. Théorème. — *Deux triangles qui ont leurs côtés respectivement parallèles ou perpendiculaires, sont semblables.*

En effet, dans ce cas, les angles sont égaux ou supplémentaires chacun à chacun (liv. I, **43**), de sorte que (ABC et A'B'C' étant les deux triangles) on a

$$\begin{aligned} A &= A' \quad \text{ou} \quad A + A' = 2 \text{ dr.}, \\ B &= B' \quad \text{ou} \quad B + B' = 2 \text{ dr.}, \\ C &= C' \quad \text{ou} \quad C + C' = 2 \text{ dr.} \end{aligned}$$

Les trois égalités de la seconde colonne ne peuvent être vérifiées ensemble, sans quoi la somme totale des angles des deux triangles serait égale à 6 droits, et non à quatre. Deux de ces égalités ne peuvent pas non plus coexister ; par exemple, on ne peut pas avoir à la fois $A + A' = 2$ dr., $B + B' = 2$ dr. ; sans quoi la somme totale serait égale à 4 dr. $+ C + C'$. Il faut donc prendre au moins deux égalités dans la première colonne, et les deux triangles ont deux angles égaux chacun à chacun (1er cas de similitude).

120. Théorème. — *Deux triangles rectangles sont semblables lorsque le rapport d'un des côtés de l'angle droit à l'hypoténuse est le même pour les deux triangles.*

En effet, nous pourrons opérer comme au n° **118** et former un troisième triangle semblable au premier et ayant même hypoténuse que le second. Le second et le troisième triangle auront alors un côté de l'angle droit égal et seront égaux, d'après le 2e cas d'égalité des triangles rectangles.

Remarque. — Outre ce cas de similitude, on peut, bien entendu, appliquer aux triangles rectangles les cas de similitude des triangles quelconques. Par exemple, deux triangles rectangles sont semblables quand ils ont un angle aigu égal (1er cas de similitude des triangles

quelconques); ou les côtés de l'angle droit proportionnels (2ᵉ cas de similitude des triangles).

121. Théorème. — *Un faisceau de droites concourantes découpe sur deux parallèles des segments proportionnels.*

Soient, par exemple, les trois droites concourantes SAA′, SBB′, SCC′ (*fig.* 119) qui rencontrent les deux parallèles ABC, A′B′C′.

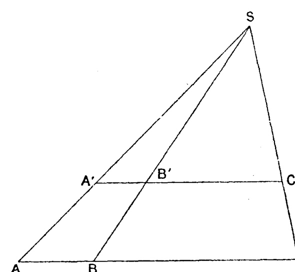


Fig. 119.

On a, dans les triangles semblables (**117**) SAB, SA′B′,

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{SB'}{SB}$$

et, dans les triangles semblables SBC, SB′C′,

$$\frac{B'C'}{BC} = \frac{SB'}{SB},$$

d'où résulte bien la proportionnalité de A′B′, B′C′ à AB, BC.

Remarque. — Les segments qui se correspondent sont tous de même sens ou tous de sens contraire, suivant que le point S est extérieur ou intérieur aux parallèles.

Réciproque. — *Si trois droites interceptent sur deux parallèles des segments proportionnels (tous de même sens ou tous de sens contraire), ces trois droites sont concourantes ou parallèles.*

Si les segments sont égaux chacun à chacun et de même sens, les droites sont parallèles (**46**, 2ᵉ réciproque).

Soient donc les droites AA′, BB′, CC′ qui interceptent sur les parallèles ABC, A′B′C′ des segments proportionnels, de sorte que l'on ait

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C}{BC} = \frac{A'C'}{AC};$$

la valeur commune des trois rapports étant différente de 1 si les segments sont de même sens sur les deux droites. Cette dernière restriction rend impossible (**46**) le parallélisme des droites AA′, BB′; celles-ci se coupent donc en un point S.

Joignant alors SC, nous voyons que cette droite coupera la paral-

lèle A′B′C′ en un point C'_1, lequel coïncide nécessairement avec C′, puisqu'on a $\frac{A'C'_1}{B'C'_1} = \frac{AC}{BC}$ (théor. précédent) $= \frac{A'C'}{B'C'}$ (hypothèse).

EXERCICES

129. Par le point d'intersection des diagonales d'un trapèze, on mène une parallèle aux bases. Démontrer que cette droite est divisée par les côtés non-parallèles en deux parties égales.

130. Soient : $a = AB$, $b = CD$ les bases d'un trapèze. On divise l'un des côtés non-parallèles dans le rapport $\frac{EA}{EC} = \frac{m}{n}$ et par le point E on mène une parallèle aux bases. Montrer que le segment de cette parallèle compris à l'intérieur du trapèze est $\frac{m \cdot CD + n \cdot AB}{m + n}$.

131. Si, des sommets d'un triangle et du point de concours des médianes, on abaisse des perpendiculaires sur une droite extérieure au triangle, la dernière de ces perpendiculaires est la moyenne arithmétique des premières (ex. précédent).

132. Par le sommet A d'un parallélogramme ABCD, on mène une sécante quelconque qui coupe la diagonale BD en E et les côtés BC, CD en F, G. Prouver que AE est moyenne proportionnelle entre EF et EG.

133. Lieu des points qui divisent dans un rapport donné les segments interceptés, par les côtés d'un angle donné, sur les parallèles à une direction donnée.

134. Quel est le lieu des points d'où l'on voit deux cercles donnés sous un même angle (1) ?

(1) L'angle sous lequel on voit une courbe d'un point déterminé, est l'angle formé par les tangentes menées de ce point à la courbe.

CHAPITRE III

RELATIONS MÉTRIQUES RELATIVES AUX TRIANGLES

122. Définition. — On nomme *projection orthogonale* (ou, pour abréger, *projection*) d'un point sur une droite, le pied de la perpendiculaire abaissée du point sur la droite.

On nomme *projection d'un segment* sur une droite, le segment qui a pour extrémités les projections du segment primitif.

123. Soit ABC (*fig.* 120) un triangle rectangle en A. De ce sommet A, abaissons sur l'hypoténuse la hauteur AD. Il existe, entre les différents éléments de la figure ainsi formée, des relations que nous allons faire connaître.

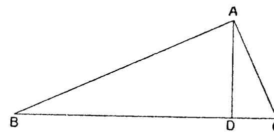


Fig. 120.

Théorème. — *Dans un triangle rectangle, chaque côté de l'angle droit est moyen proportionnel entre l'hypoténuse entière et sa projection sur l'hypoténuse.*

Par exemple, AB est moyen proportionnel entre BD et BC. En effet, les deux triangles rectangles ABD, ABC, sont semblables, comme ayant l'angle en A commun (**120**, *Remarque*). Les côtés homologues des côtés AB, BD du premier triangle étant les côtés BC, AB du second, on a bien

$$\frac{BD}{AB}=\frac{AB}{BC}, \quad \text{ou} \quad \overline{AB}^2 = BD.BC.$$

C. Q. F. D.

Corollaire. — *Toute corde d'un cercle est moyenne proportionnelle entre le diamètre et sa projection sur le diamètre qui passe à l'une de ses extrémités* (*fig.* 121).

Car ce diamètre et cette corde sont bien l'hypoténuse et un côté de l'angle droit d'un même triangle rectangle (**73**, cor. II).

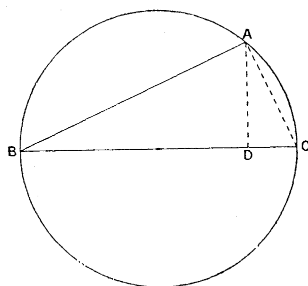


Fig. 121.

Remarque. — Les triangles semblables ABD, ABC (*fig.* 120, 121) donnent encore

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{AC},$$

ou $$AB \cdot AC = BC \cdot AD.$$

Ainsi *le produit des côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle est égal au produit de l'hypoténuse par la hauteur correspondante.*

124. Théorème de Pythagore. — *Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.*

Nous venons de voir que l'on a

$$\overline{AB}^2 = BC.\ BD$$

Le même théorème, appliqué au côté AC, donne

$$\overline{AC}^2 = BC.\ CD;$$

d'où, en ajoutant membre à membre

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = BC\,(BD + CD) = \overline{BC}^2$$

C. Q. F. D.

Remarque. — Ce théorème sert à calculer un côté quelconque d'un triangle rectangle, lorsqu'on donne les deux autres.

Ainsi, soit à calculer l'hypoténuse d'un triangle rectangle qui a pour côtés de l'angle droit 3^m et 4^m. L'unité de longueur étant le mètre, le carré du nombre qui mesurera l'hypoténuse sera la somme des carrés des nombres 3 et 4, qui mesurent les côtés de l'angle droit. Cette somme étant $3^2 + 4^2 = 25$, dont la racine carrée est 5, l'hypoténuse sera égale à 5 mètres.

Soit encore à calculer l'un des côtés de l'angle droit d'un triangle

rectangle, connaissant l'hypoténuse, égal à 10^m et l'autre côté de l'angle droit, égal à 7^m. Le carré du côté cherché, ajouté à 49 ($= 7^2$) devra donner 100 ($= \overline{10}^2$) ; ce carré sera donc égal à $100 - 49 = 51$. La racine carrée de 51 (soit, a un centième près : 7, 14) donnera la mesure, en mètres, du côté cherché.

125. Théorème. — *Dans un triangle rectangle, la perpendiculaire abaissée du sommet de l'angle droit sur l'hypoténuse est moyenne proportionnelle entre les deux segments qu'elle détermine sur l'hypoténuse.*

En effet, les deux triangles ABD, ACD (*fig.* 120) sont semblables comme ayant leurs côtés perpendiculaires. Les lignes BD, AD sont donc bien proportionnelles à AD, DC.

Corollaire. — *Dans un cercle, la perpendiculaire abaissée d'un point quelconque sur le diamètre est moyenne proportionnelle entre les segments qu'elle détermine sur ce diamètre.*

126. Théorème. — *La différence des carrés de deux côtés d'un triangle est égale à la différence des carrés de leurs projections sur le troisième côté.*

Dans le triangle ABC (*fig.* 123), projetons le sommet B en H sur AC. Les égalités

$$\overline{AB}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{BH}^2,$$

$$\overline{BC}^2 = \overline{CH}^2 + \overline{AH}^2$$

donnent bien, par soustraction, $\overline{BC}^2 - \overline{AB}^2 = \overline{CH}^2 - \overline{AH}^2$.

Théorème. — *Dans tout triangle :*

1° *Le carré du côté opposé à un angle aigu est égal à la somme des carrés des deux autres côtés, moins deux fois le produit de l'un de ces côtés par la projection de l'autre sur lui ;*

2° *Le carré du côté opposé à un angle obtus est égal à la somme des carrés des deux autres côtés, plus deux fois le produit de l'un de ces côtés par la projection de l'autre sur lui.*

1° Dans le triangle ABC (*fig.* 122), soit BC le côté opposé à l'angle aigu A. Du point B, abaissons la perpendiculaire BH sur AC. On a (théor. précéd.)

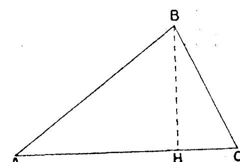


Fig. 122.

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{CH}^2 - \overline{AH}^2.$$

Mais, CH étant la différence entre AC et AH, on peut (1) remplacer $\overline{CH}^2$ par

$$\overline{AC}^2 - 2AC \cdot AH + \overline{AH}^2.$$

Il vient bien alors

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2AC \cdot AH.$$

2° Dans le triangle ABC (*fig.* 123), soit BC le côté opposé à l'angle obtus A. Du point B, abaissons la perpendiculaire BH sur AC. On a encore $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{CH}^2 - \overline{AH}^2$.

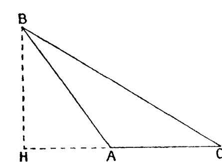


Fig. 123.

CH étant la somme de AC et de AH, on peut (1) remplacer $\overline{CH}^2$ par $\overline{AC}^2 + 2AC.\,AH + \overline{AH}^2$. Il vient bien alors

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + 2AC \cdot AH.$$

Corollaire. — *Un angle d'un triangle est aigu, droit ou obtus, suivant que le carré du côté opposé à cet angle est inférieur, égal ou supérieur à la somme des carrés des deux autres côtés.*

127. Théorème de Stewart. — *Étant donnés un triangle* ABC *et un point* D *sur la base entre* B *et* C, *on a*

$$\overline{AB}^2.\,\overline{DC} + \overline{AC}^2.\,\overline{BD} - \overline{AD}^2 \cdot \overline{BC} = \overline{BC}.\,\overline{DC}.\,\overline{BD}.$$

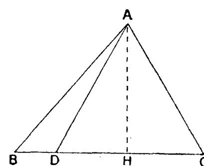


Fig. 124.

Du point A (*fig.* 124), abaissons sur BC la perpendiculaire AH et supposons, pour fixer les idées, que le point H tombe du même côté de D que le point C. Les deux théorèmes du numéro précédent s'appliquent, l'un au triangle ACD, l'autre au triangle ABD et donnent

$$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DC}^2 - 2\,CD.\,DH$$
$$\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 + 2\,BD.\,DH.$$

(1) Nous supposons connues les formules qui donnent le carré de la somme ou de la différence de deux nombres.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Voir Tannery, *Leçons d'Arithmétique*, chap. II, nos 83, 85.

Multiplions ces deux égalités, l'une par BD, l'autre par CD, et ajoutons membre à membre. Le terme 2. BD. CD. DH, qui se trouve une fois avec le signe — et une fois avec le signe +, disparaît et nous avons

$$\overline{AC}^2 . \overline{BD} + \overline{AB}^2 . CD = \overline{AD}^2 (BD + CD) + \overline{DC}^2 . \overline{BD} + \overline{BD}^2 . \overline{CD}$$
$$= \overline{AD}^2 . \overline{BC} + \overline{BD} . \overline{CD}\, \overline{BC}.$$

128. Application au calcul de différentes lignes remarquables d'un triangle.

Soit un triangle quelconque ABC dont les côtés BC, CA, AB sont mesurés respectivement par les nombres (supposés donnés) a, b, c : proposons-nous de calculer les longueurs des médianes, des bissectrices et des hauteurs de ce triangle.

1° **Médianes.** — Soit AD la médiane issue du sommet A (*fig.* 125). Dans l'égalité fournie par le théorème précédent, il faudra remplacer BC, CA, AB respectivement par a, b, c; DC et BD par $\frac{a}{2}$. On pourra tout diviser par a et il viendra

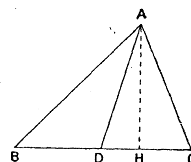


Fig. 125.

$$\frac{b^2 + c^2}{2} = \overline{AD}^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2, \text{ d'où } \overline{AD}^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}.$$

Ainsi *la somme des carrés de deux côtés d'un triangle est égale à deux fois le carré de la moitié du troisième côté, plus deux fois le carré de la médiane correspondante.*

128 *bis.* D'autre part, si dans les égalités

$$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DC}^2 - 2\ CD.\ DH$$
$$\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 + 2\ BD.\ DH$$

du numéro **127**, on remplace encore BC, CA, AB par a, b, c; DC et BD par $\frac{a}{2}$ et qu'on retranche membre à membre la première de la seconde, on a

$$c^2 - b^2 = 2\,a.\ DH.$$

Ainsi *la différence des carrés de deux côtés d'un triangle est égale*

au double produit du troisième côté par la projection, sur ce côté, de la médiane correspondante.

Corollaire. — *Le lieu des points* C, *tel que la différence des carrés de leurs distances à deux points fixes* A *et* B *soit constante, est une perpendiculaire à* AB.

Car si la différence $\overline{AB}^2 - \overline{AC}^2$ est constante, la projection H du point C sur AB est un point fixe.

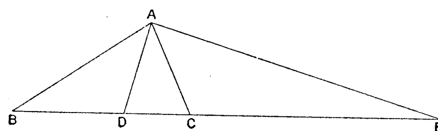


Fig. 126.

129. 2° **Bissectrices.** — Désignons maintenant par AD la bissectrice de l'angle A (*fig.* 126). Le point D divisera BC proportionnellement aux côtés AB et AC, de sorte qu'on aura

$$\frac{BD}{c} = \frac{CD}{b} = \frac{BC}{b+c} = \frac{a}{b+c} \text{ ou } BD = \frac{ac}{b+c},\ CD = \frac{ab}{c+b}.$$

Dans la relation fournie par le théorème du n° **127**, nous remplacerons BD et CD par ces valeurs, en même temps que BC, CA, AB par les leurs et nous aurons, en divisant par a

$$\frac{c^2\,b}{b+c} + \frac{b^2\,c}{b+c} - \overline{AD}^2 = \frac{ab}{b+c}\cdot\frac{ac}{b+c}$$

d'où

$$\overline{AD}^2 = \frac{c^2\,b + b^2\,c}{b+c} - \frac{a^2\,bc}{(b+c)^2} = bc\,\frac{(b+c)^2 - a^2}{(b+c)^2}.$$

Soit encore AE la bissectrice de l'angle extérieur en A (*fig.* 126), et supposons, pour fixer les idées, que AB soit plus grand que AC, de sorte que le point E, qui divise extérieurement le côté BC proportionnellement à AB et AC, se trouve sur BC prolongé au delà du point C. On aura

$$\frac{BE}{c} = \frac{CE}{b} = \frac{BC}{c-b} = \frac{a}{c-b}, \text{ ou } BE = \frac{ac}{c-b},\ CE = \frac{ab}{c-b}.$$

Nous appliquerons le théorème du n° **127** au triangle ABE et au

point C pris sur sa base BE. En remplaçant BC, CA, AB, BE, CE par leurs valeurs et divisant par a, nous aurons

$$\frac{c^2b}{c-b} + \overline{EA}^2 - \frac{b^2c}{c-b} = \frac{ac}{c-b} \cdot \frac{ab}{c-b},$$

d'où $$\overline{AE}^2 = \frac{a^2bc}{(c-b)^2} - \frac{c^2b - b^2c}{c-b} = bc.\frac{a^2-(c-b)^2}{(c-b)^2}.$$

130. 3° **Hauteurs.** — Du point A, abaissons la hauteur AH. (*fig.* 127) Des deux angles B, C, l'un au moins est aigu. Supposons, pour fixer les idées, que l'angle B soit tel. On peut appliquer le théorème du n° **126** au côté AC $= b$, opposé à cet angle B et écrire

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2a \cdot \overline{BH}$$

ou $$BH = \frac{a^2+c^2-b^2}{2a}.$$

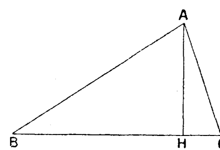


Fig. 127.

Mais, dans le triangle rectangle AHB, on a

$$\overline{AH}^2 = c^2 - \overline{BH}^2 = c^2 - \frac{(a^2+c^2-b^2)^2}{4a^2}.$$

Cette égalité, dont le second membre est une différence de deux carrés, peut par suite s'écrire (1)

$$\overline{AH}^2 = \left(c - \frac{a^2+c^2-b^2}{2a}\right)\left(c + \frac{a^2+c^2-b^2}{2a}\right)$$
$$= \frac{(2ac - a^2 - c^2 + b^2)(2ac + a^2 + c^2 - b^2)}{4a^2}$$
$$= \frac{[b^2-(a-c)^2][(a+c)^2-b^2]}{4a^2}.$$

Mais chacun des deux facteurs qui figurent au numérateur du second membre est lui-même une différence de carrés. La formule précédente s'écrit donc encore

$$\overline{AH}^2 = \frac{(b-a+c)(b+a-c)(a+c-b)(a+b+c)}{4a^2}.$$

(1) Voir *Leçons d'Arithmétique* de M. Tannery, chap. II, n° 87.

Si l'on désigne par p le demi-périmètre du triangle, de sorte que $a+b+c=2p$, les quantités $b+c-a$, $c+a-b$, $a+b-c$ seront respectivement égales à $2p-2a$, $2p-2b$, $2p-2c$, de sorte que

$$\overline{AH}^2 = \frac{4p\,(p-a)(p-b)(p-c)}{a^2}.$$

Si, d'autre part, on effectue le produit $[a+c)^2-b^2]\,[b^2-(a-c^2)]$, on voit qu'on peut écrire

$$\overline{AH}^2 = \frac{1}{4a^2}[4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)]^2 = \frac{1}{4a^2}(2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4)$$

130 *bis*. 4° **Rayon du cercle circonscrit.** — *Le produit de deux côtés d'un triangle est égal à la hauteur qui tombe sur le troisième côté, multipliée par le diamètre du cercle circonscrit.*

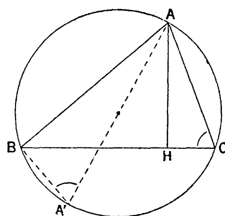


FIG. 128.

Dans le triangle ABC (*fig.* 128), soient AH la hauteur issue de A, AA' le diamètre du cercle circonscrit. Les triangles AHC, ABA' sont rectangles, l'un en H, l'autre en B; ils ont un angle aigu égal ($\widehat{A'} = \widehat{C}$ comme interceptant le même arc AB); ils sont donc semblables et donnent $\frac{AH}{AC} = \frac{AB}{AA'}$, ou $AB.AC = AH.AA'$.

C. Q. F. D.

D'après la valeur trouvée ci-dessus pour AH, ce théorème donne (R désignant le rayon du cercle circonscrit)

$$R = \frac{AA'}{2} = \frac{bc}{2AH} = \frac{abc}{4\sqrt{p\,(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

EXERCICES

135. Le produit des segments interceptés par une tangente mobile d'un cercle sur deux tangentes parallèles est constant.

136. L'inverse du carré de la hauteur d'un triangle rectangle est égal à la somme des inverses des carrés des côtés de l'angle droit.

137. Quel est le rapport de la somme des carrés des médianes d'un triangle à la somme des carrés des côtés ?

138. La somme des carrés des distances d'un point quelconque du plan à deux sommets opposés d'un parallélogramme a, avec la somme des carrés des distances du même point aux deux autres sommets, une différence constante. — Cas du rectangle.

139. La somme des carrés des quatre côtés d'un quadrilatère est égale à la somme des carrés des diagonales, plus quatre fois le carré de la droite qui joint les milieux des diagonales.

140. A, B, C étant les sommets d'un triangle, G le point de concours des médianes, M un point quelconque du plan, on a $\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 + \overline{MC}^2 = \overline{GA}^2 + \overline{GB}^2 + \overline{GC}^2 + 3\overline{MG}^2$.

141. Trouver le lieu des points tels que les carrés de leurs distances à deux points fixes, multipliés respectivement par des nombres donnés, aient une somme ou une différence donnée. — Retrouver ainsi le théorème du nº **116**.

141 *bis*. Trouver le lieu des points tels que les carrés de leurs distances à trois points donnés, multipliés respectivement par trois nombres donnés, aient une somme constante. — Même problème lorsque, au lieu de trois points donnés, il y en a un nombre quelconque.

142. Le carré de la bissectrice d'un angle d'un triangle est égal aux produits des côtés qui la comprennent, diminué du produit des segments qu'elle intercepte sur le troisième côté. — Énoncé analogue pour la bissectrice de l'angle extérieur.

143. Déduire des calculs de la médiane et de la bissectrice (**128**, **129**) les inégalités indiquées, ex. 11 et 18.

143 *bis*. Si la médiane d'un triangle est moyenne proportionnelle entre les côtés b, c qui la comprennent, le carré construit sur la différence $b - c$ a pour diagonale le troisième côté du triangle.

144. Par un point intérieur à un cercle, on mène deux cordes rectangulaires. Prouver que la somme des carrés de deux côtés opposés du quadrilatère qui a pour sommets les extrémités de ces cordes est égale au carré du diamètre.

145. Le produit des distances d'un point d'un cercle à deux côtés opposés d'un quadrilatère inscrit à ce cercle est égal au produit des distances du même point aux deux autres côtés, ou aux deux diagonales.

Que devient cet énoncé lorsque deux côtés opposés deviennent tangents ?

CHAPITRE IV

LIGNES PROPORTIONNELLES DANS LE CERCLE
AXE RADICAL

131. Théorème. — *Si, d'un point* A *pris dans le plan d'un cercle, on mène des sécantes à ce cercle, le produit des distances du point aux deux points d'intersection de la sécante avec le cercle est constant.*

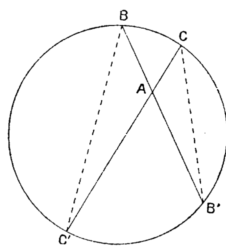


FIG. 129.

Nous distinguerons deux cas :

1° *Le point* A *est intérieur au cercle* (*fig.* 129). Soient les deux sécantes ABB′, ACC′ menées par ce point. Joignons BC′, CB′. Les deux triangles ABC′, ACB′ sont semblables comme étant équiangles. Ils ont en effet les angles A égaux comme opposés par le sommet et l'angle $B' = C'$ comme ayant tous deux pour mesure le demi-arc BC. La proportionnalité des côtés donne alors $\frac{AB}{AC} = \frac{AC'}{AB'}$; ou, en égalant le produit des extrêmes au produit des moyens :

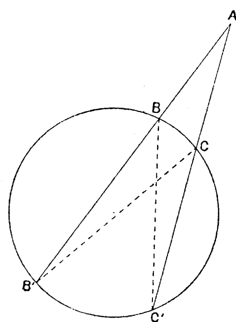


FIG. 129 *bis*.

$$AB.AB' = AC.AC'$$

C. Q. F. D.

2° *Le point* A *est extérieur* (*fig.* 129 *bis*). Soient les deux sécantes ABB′, ACC′ issues de ce point. Joignons encore CB′, BC′. Les deux triangles ABC′, ACB′ sont encore semblables comme étant équi-angles : ils ont en effet l'angle $\widehat{A}$ commun et l'angle $\widehat{B'} = \widehat{C'}$ comme ayant

tous deux pour mesure le demi-arc BC. La proportionnalité des côtés donne encore $\frac{AB}{AC} = \frac{AC'}{AB'}$, d'où la proposition énoncée.

131 *bis*. **Réciproque.** — *Si, sur deux droites* ABB′, ACC′ *issues d'un point* A (*fig.* 130), *on prend quatre points* B,B′ ; C,C′ *tels que le produit* AB·AB′ *soit égal au produit* AC·AC′ (*le point* A *étant extérieur aux deux segments* BB′, CC′ *ou intérieur à tous deux*) *ces quatre points sont sur une même circonférence.*

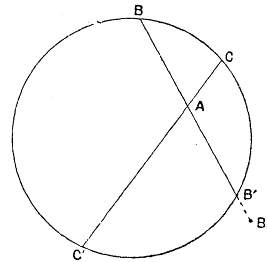


Fig. 130.

En effet, les trois points non en ligne droite B,C,C′ déterminent une circonférence, et cette circonférence coupe ABB′ en un point B'_1, tel que $AB \cdot AB'_1 = AC \cdot AC'$. Cette égalité, combinée avec l'hypothèse $AC \cdot AC' = AB \cdot AB'$, montre que $AB'_1 = AB'$. Le point B'_1 coïncide donc avec B′.

132. Théorème. — *Si, par un point extérieur à un cercle, on mène une tangente et une sécante, la tangente est moyenne proportionnelle entre la sécante entière et sa partie extérieure.*

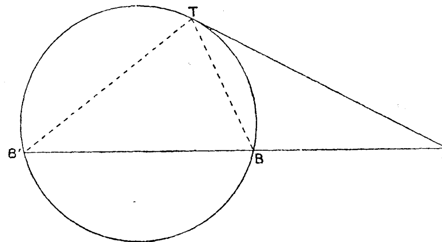


Fig. 131.

Soient en effet ABB′ la sécante, AT la tangente (*fig.* 131). On répétera la démonstration du numéro **131** (2°) sans aucune modification, si ce n'est qu'on remplacera les deux lettres C,C′ par la lettre T.

Nous voyons encore ici un exemple de ce fait (II, **64**) que la tangente doit être regardée comme ayant avec la circonférence deux points communs confondus au point de contact.

Réciproquement, *si, sur une droite* ABB′ *on porte, à partir du point* A, *les segments de même sens* AB,AB′ *et, sur une autre droite issue du même point* A, *la longueur* AT (*fig.* 132) *moyenne proportionnelle*

entre AB *et* AB′, *les trois points* B,B′,T *sont sur une circonférence tangente en* T *à* AT.

En effet, la circonférence BB′T a, avec la droite AT, un point commun T ; s'il y avait un autre point commun T′, on aurait (**131**).

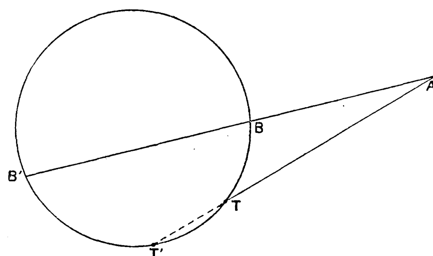


Fig. 132.

$$AB \cdot AB' = AT \cdot AT'.$$

Cette égalité, comparée à l'hypothèse $AB \cdot AB' = AT^2$, montre que le point T′ est nécessairement confondu avec T.

133. Définition. — On nomme *puissance* d'un point A, par rapport à une circonférence, le produit des segments qui vont du point A aux points d'intersection, avec la circonférence, d'une sécante quelconque issue de ce point (produit qui, d'après le nº **131**, est indépendant de la direction de la sécante) : ce produit étant précédé du signe + si le point A est extérieur au cercle, du signe — s'il lui est intérieur. Lorsque le point est extérieur au cercle, la puissance est égale au carré de la tangente menée de ce point.

134. *La puissance d'un point* A, *par rapport à un cercle de centre* O, *est égale à la différence des carrés de la distance* OA *et du rayon.*

Prenons en effet, pour sécante issue du point A, la droite OA, qui coupe la circonférence en deux points B,B′: les segments AB,AB′ représentent, l'un la somme, l'autre la différence de OA et du rayon ; leur produit est donc bien égal à la différence des carrés de ces deux quantités.

Si nous avons égard au signe de la puissance, nous voyons que celle-ci est toujours égale à $d^2 - R^2$ (où d est la distance OA, R le rayon).

135. *Quand deux circonférences se coupent à angle droit, le carré du rayon de chacune d'elles est égal à la puissance de son centre par rapport à l'autre; et réciproquement.*

Si les circonférences O,O′ (*fig.* 133) se coupent à angle droit au point A, la tangente à la circonférence O′ en ce point n'est autre que OA, et la puissance du point O par rapport au cercle O′ est $\overline{OA}^2$

Réciproquement, si la puissance du point O par rapport au cercle O′ est $\overline{OA}^2$, OA est tangent à ce cercle, et les deux cercles sont orthogonaux.

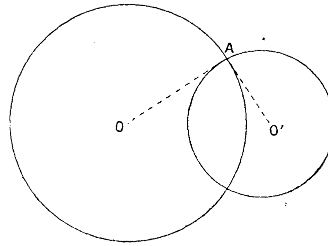


Fig. 133.

136. Théorème. — *Le lieu des points qui ont même puissance par rapport à deux circonférences données est une droite perpendiculaire à la ligne des centres.*

Cette droite a reçu le nom d'*axe radical* des deux cercles.

Soient deux circonférences de centres O,O′ (*fig.* 134) et de rayons r, r'. Si le point M a même puissance par rapport à ces deux circonférences, on aura

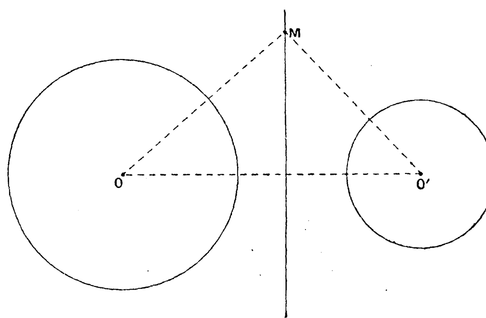


Fig. 134.

$\overline{OM}^2 - r^2 = \overline{O'M}^2 - r'^2$, ce qui peut s'écrire $\overline{OM}^2 - \overline{O'M}^2 = r^2 - r'^2$ et fournit (**128** *bis*) la conclusion demandée.

Remarques. — I. La démonstration précédente subsiste si l'une des deux circonférences a un rayon nul et se réduit à son centre. Ainsi *le lieu des points tels que leur puissance par rapport à un cercle donné soit égale au carré de leur distance à un point donné, est une droite perpendiculaire à celle qui joint le point donné au centre du cercle.*

On peut appeler cette droite l'*axe radical du cercle et du point.*

II. *L'axe radical de deux cercles concentriques n'existe pas* [1].

[1] *L'axe radical de deux cercles concentriques doit être considéré comme rejeté à l'infini.* Car on déduit aisément du nº **128** *bis* que si, la différence $\overline{OM}^2 - \overline{O'M}^2$ restant constante, les points O et O′ se rapprochent indéfiniment l'un de l'autre, la droite, lieu du point M, s'éloigne à l'infini.

137. *Si les deux cercles se coupent, l'axe radical est la corde commune.*

Il est clair, en effet, que tout point de la corde commune AB (*fig.* 135) appartient au lieu.

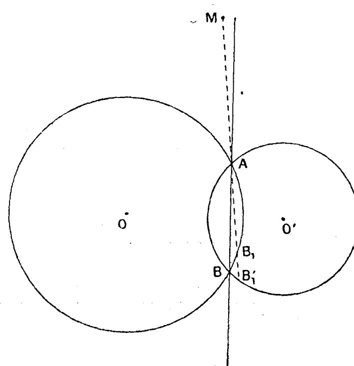


Fig. 135.

Il résulte alors de ce qui précède que, réciproquement, tout point M du lieu appartient à la corde commune. C'est aussi ce qui peut se voir directement en joignant MA : si cette droite coupait les deux circonférences en deux nouveaux points différents entre eux B_1, B'_1, les deux puissances $MA \cdot MB_1$ et $MA \cdot MB'_1$ seraient différentes.

De même, *si les deux circonférences sont tangentes, l'axe radical est la tangente commune.*

138. *L'axe radical de deux circonférences* (ou du moins la partie de cet axe extérieure aux deux cercles) *est le lieu des centres des cercles coupant les deux premiers à angle droit.*

Car le centre d'un tel cercle a même puissance par rapport aux deux circonférences données : le carré du rayon du cercle.

L'axe radical divise en deux parties égales une tangente commune quelconque.

139. Théorème. — *Les axes radicaux de trois circonférences, prises deux à deux, se coupent en un même point ou sont parallèles.*

Car le point d'intersection de deux d'entre eux a même puissance par rapport aux trois circonférences : il appartient donc au troisième axe radical.

Ce point a reçu le nom du *centre radical* des trois circonférences; s'il leur est extérieur, il est le centre d'un cercle qui les coupe toutes trois à angle droit.

Remarque. — Si deux des axes radicaux coïncident, le raisonnement qui précède prouve que le troisième coïncide avec les premiers. Les trois circonférences données ont *même axe radical.*

Tout cercle orthogonal aux deux premières est alors orthogonal à la troisième. Inversement, s'il en est ainsi, les trois circonférences ont même axe radical.

EXERCICES

146. On donne un cercle et deux points A, B dans son plan. Par A on mène une sécante mobile AMN qui coupe le cercle en M, N. Démontrer que la circonférence menée par M, N et par le point B passe par un autre point fixe.

147. Une circonférence variable passe par deux points fixes A, B (ou reste tangente à une droite fixe AB en un point fixe A) pendant que son centre s'éloigne indéfiniment. Démontrer qu'une droite fixe quelconque, issue d'un point C de AB, coupe cette circonférence variable en deux points dont l'un s'éloigne indéfiniment, tandis que l'autre se rapproche indéfiniment du point C.

148. La différence des puissances d'un point quelconque par rapport à deux cercles donnés est proportionnelle à la distance de ce point à l'axe radical.

149. Le lieu des points tels que le rapport de leurs puissances, par rapport à deux circonférences données, soit égal à un nombre donné, est une circonférence qui a même axe radical avec les deux premières. En déduire le lieu proposé, ex. 128.

150. Parallèlement au côté BC d'un triangle on mène la sécante DE qui coupe le côté AB en D et le côté AC en E. Montrer que l'axe radical des deux circonférences qui ont respectivement pour diamètres BE et CD, est toujours la hauteur du triangle ABC, menée par le point A.

151. D, D′ étant deux points du côté BC d'un triangle; E, E′ deux points du côté CA; F, F′ deux points du côté AB; si l'on sait qu'il existe un cercle passant par D, D′, E, E′, un cercle passant par E, E′, F, F′ et un cercle passant par F, F′, D, D′, il en résulte que les six points D, D′, E, E′, F, F′, sont sur le même cercle.

152. Dans quels cas les différents cercles orthogonaux à deux cercles donnés O, O′ coupent-ils la ligne des centres OO′? Montrer qu'ils la coupent alors tous aux deux mêmes points (*points limites* de Poncelet): à savoir, les points qui ont avec les cercles donnés même axe radical.

153. Par les points fixes A, B on fait passer une circonférence quelconque et, par les points fixes C, D, en ligne droite avec les premiers, une autre circonférence également quelconque. Démontrer que la corde commune à ces deux circonférences passe par un point fixe.

154. Si le centre radical de trois circonférences leur est intérieur, il est le centre d'une circonférence qui est divisée en deux parties égales par chacune des premières.

154 *bis*. Le cercle qui divise en deux parties égales trois circonférences données (de centres O, O′, O″) a pour centre le symétrique du centre radical par rapport au centre du cercle circonscrit au triangle OO′O″.

CHAPITRE V

HOMOTHÉTIE ET SIMILITUDE

140. Définition. — Ayant choisi un point S qu'on nomme *centre d'homothétie* et un nombre k qu'on nomme *rapport d'homothétie* ou *rapport de similitude*, on appelle *homothétique* d'un point quelconque M le point M′ obtenu en joignant SM et prenant à partir du point S, sur cette droite (*fig.* 136) ou sur son prolongement (*fig.* 137) un segment SM′ tel que $\frac{SM'}{SM} = k$.

L'homothétie est dite *directe* si le segment SM′ est pris dans le sens SM (*fig.* 136) et *inverse* si ces deux segments sont de sens opposés (*fig.* 137).

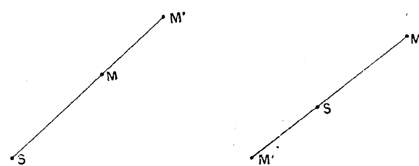


Fig. 136 et 137.

La *figure homothétique* d'une figure F est la figure formée par l'ensemble des points M′, homothétiques de ceux qui constituent la figure F.

Remarques. — I. *Le centre d'homothétie est son propre homothétique ; c'est le seul point qui jouisse de cette propriété* (sauf, bien entendu, le cas où l'homothétie est directe et le rapport d'homothétie égal à 1 ; tout point coïncide alors avec son homothétique).

II. La symétrie par rapport à un point (**99**) est un cas particulier de l'homothétie inverse.

141. Théorème. — *Dans deux systèmes homothétiques, la droite qui joint deux points quelconques de l'un des systèmes et celle qui joint les points homologues de l'autre sont toujours parallèles et dans le*

rapport de similitude ; elles sont de même sens ou de sens contraires suivant que l'homothétie est directe ou inverse.

Soient, en effet, A et B deux points de la première figure, A′ et B′ leurs homothétiques (*fig.* 138), S le centre, k le rapport d'homothétie. La proportion $\frac{SA'}{SA} = \frac{SB'}{SB} = k$ montre (**114**, Récipr.) que les droites AB, A′B′ sont parallèles ; et la similitude des triangles SAB, SA′B′, qu'elles sont dans le même rapport que SA, SA′.

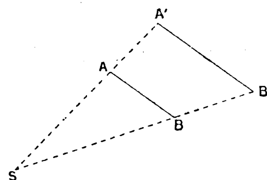


Fig. 138.

Corollaires. — I. *La figure homothétique d'une droite est une droite.*

Car si le point B se déplace sur la droite AB, celle-ci restant fixe, le point B′ décrira la parallèle menée par le point A′ à AB.

II. *La figure homothétique d'une circonférence est une circonférence et les centres sont deux points homologues.*

Car si le point B se déplace de manière que sa distance au point fixe A reste constante, le point B′ décrira une circonférence de centre A′ et de rayon $A'B' = k \cdot AB$.

III. *La figure homothétique d'un triangle est un triangle semblable au premier.*

142. Théorème. — *Réciproquement, s'il existe dans le plan de deux systèmes deux points* O, O′ *tels que la droite qui joint le point* O *à un point* M *quelconque du premier système et celle qui joint le point* O′ *au point* M′ *homologue du second soient constamment parallèles et dans un rapport donné* k *(toujours de même sens ou toujours de sens contraire), les deux systèmes sont homothétiques.*

Pour que ce théorème soit complètement vrai, *il faut considérer comme homothétiques directs deux systèmes* dans lesquels les droites OM, O′M′ sont égales et de même sens, systèmes *qui sont égaux et dérivent l'un de l'autre par une translation.*

Démonstration. — Soient M, M′ deux points homologues quel-

conques (*fig.* 139). Joignons MM′. Si cette droite est parallèle à OO′, le quadrilatère OMM′O′ est un parallélogramme et OM = O′M′ : les deux systèmes dérivent l'un de l'autre par une translation. Dans le cas contraire, la droite MM′ va couper OO′ en un point S qui est fixe, c'est-à-dire indépendant du choix du couple de points M, M′ : ce point divise en effet la droite OO′ (extérieurement si les segments OM, O′M′ sont de même sens, intérieurement s'ils sont de sens contraire) dans le rapport donné k, à cause de la similitude des triangles SOM, SO′M′. D'ailleurs à cause de cette même similitude on a bien $\frac{SM'}{SM} = \frac{O'M'}{OM} = k.$ C. Q. F. D.

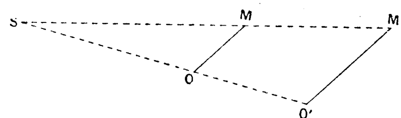


Fig. 139.

143. Corollaire. — *Deux circonférences peuvent toujours être considérées comme homothétiques de deux manières différentes.*

En effet, O, O′ étant les centres des deux circonférences, les extrémités M, M′ de deux rayons homologues parallèles et de même sens satisferont aux conditions du théorème précédent et décriront deux figures homothétiques directes (*fig.* 140); de même les extrémités M, M′ de deux rayons parallèles et de sens contraire seront les points homologues de deux figures homothétiques inverses : dans les deux cas, le rapport de similitude est égal au rapport des rayons.

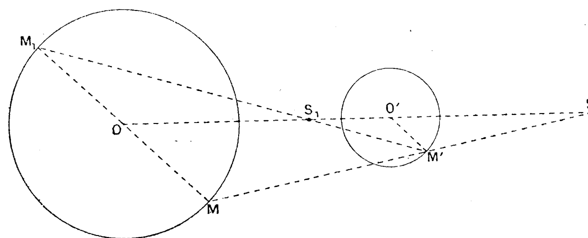


Fig. 140.

Deux circonférences ont donc deux centres d'homothétie [1] (ou *centres de similitude*) S, S_1, l'un direct, l'autre inverse : ces points divisent harmoniquement la ligne des centres, le rapport de division étant égal au rapport des rayons.

Les points de contact d'une tangente commune extérieure sont

(1) Toutefois, deux circonférences égales n'ont point de centre de similitude direct; elles ne peuvent être considérées comme homothétiques directes que grâce à l'extension donnée à ce mot au numéro précédent.

homothétiques directs puisque les rayons qui y aboutissent sont parallèles et de même sens; les points de contact d'une tangente commune intérieure sont de même homothétiques inverses.

Donc encore, *les tangentes communes extérieures (lorsqu'il en existe) vont se rencontrer au centre de similitude direct; les tangentes communes intérieures (s'il en existe) au centre de similitude inverse.*

Si les circonférences sont tangentes, le point de contact est un centre de similitude.

REMARQUE. — *Deux circonférences ne peuvent être homothétiques de plus de deux manières différentes.*

Car s'il y a homothétie, les centres se correspondent (**141**, cor. II) et les rayons homologues sont parallèles. Suivant qu'ils sont de même sens ou de sens contraire, on retombe sur l'une ou l'autre des deux homothéties précédemment constatées.

144. Théorème. — *Deux figures homothétiques à une troisième sont homothétiques entre elles et les trois centres d'homothétie sont en ligne droite.*

Soient les deux figures F_2, F_3 (*fig.* 141) homothétiques d'une

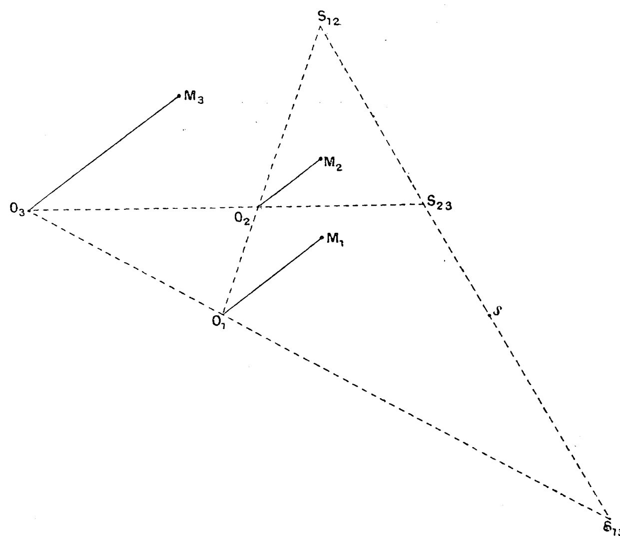


FIG. 141.

même figure F_1; soient O_2, O_3 les homologues dans F_2, F_3 d'un point O_1, pris une fois pour toutes dans F_1; M_2, M_3 les homologues

d'un point M_1 quelconque de F_1. Les droites O_2M_2, O_3M_3 sont parallèles, comme étant toutes deux parallèles à O_1M_1; elles sont toujours de même sens (si elles sont toutes deux de même sens que O_1M_1 ou toutes deux de sens contraires, c'est-à-dire si les homothéties (F_1, F_2) et (F_1, F_3) sont de même espèce) ou toujours de sens contraires (si les deux homothéties primitives sont de noms contraires); enfin elles sont dans un rapport constant, car les égalités $\frac{O_2M_2}{O_1M_1} = k$ et $\frac{O_3M_3}{O_1M_1} = k'$ entraînent par division $\frac{O_3M_3}{O_2M_2} = \frac{k'}{k}$. Les deux figures F_2, F_3 sont donc bien homothétiques entre elles, l'homothétie étant directe si les deux homothéties primitives sont de même nom; inverse, si elles sont de noms contraires.

Soient maintenant S_{23} le centre d'homothétie de F_2, F_3; S_{31} le centre d'homothétie de F_3, F_1; S_{12} le centre d'homothétie de F_1, F_2 : je dis que ces trois points sont en ligne droite. En effet le point S_{23}, considéré comme appartenant à la figure F_2, est son propre homologue dans la figure F_3; il a pour homologue dans la figure F_1 un certain point s. La droite sS_{23} passera par le point S_{31} (comme joignant des points homologues de F_1, F_3) et par le point S_{12} (comme joignant des points homologues de F_1, F_2).

C. Q. F. D.

Remarque. — On voit que, quand trois figures sont homothétiques deux à deux, il y a une ou trois homothéties directes.

145. Trois circonférences peuvent être regardées comme homothétiques deux à deux, et cela de quatre manières différentes : on peut, en effet (**143**), choisir arbitrairement les sens des deux premières homothéties (ce qui fait quatre combinaisons possibles), la troisième se déduisant des deux premières. En appliquant le théorème précédent, on voit que les *trois centres de similitude directe sont en ligne droite ainsi que chaque centre de similitude directe avec les centres de similitude inverse qui ne lui sont pas conjugués.* Les quatre droites ainsi définies sont dites *axes de similitude :* il y en a un *direct* et trois *inverses;* ils se coupent deux à deux aux six centres de similitude.

Définition. — On nomme *quadrilatère complet* (*fig.* 142) la figure formée en prolongeant les côtés opposés d'un quadrilatère ordinaire

jusqu'à leur rencontre. Un quadrilatère complet a six *sommets*, A, B, C, D, E, F (*fig.* 142) opposés deux à deux. On appelle encore *diagonale* toute droite joignant deux sommets opposés, de sorte que le quadrilatère complet AB CD EF a trois diagonales AB, CD, EF.

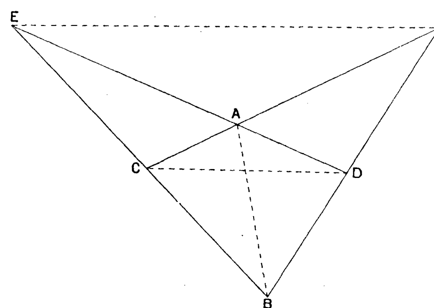


Fig. 142.

Moyennant ces conventions, on voit que *les axes de similitude de trois circonférences forment un quadrilatère complet ayant pour diagonales les trois lignes des centres.*

146. Définition. — Deux figures sont *semblables* quand elles peuvent être placées de manière à être homothétiques.

Deux arcs de cercles dont les angles aux centres sont égaux sont, par exemple, deux figures semblables.

Théorème. — *Deux polygones semblables ont leurs angles égaux et leurs côtés homologues proportionnels.*

Prenons en effet les deux polygones dans la position où ils sont homothétiques; les angles seront alors égaux chacun à chacun comme ayant leurs côtés parallèles et de même sens, ou parallèles et de sens contraires (suivant le sens de l'homothétie) et le rapport de deux côtés homologues quelconques sera égal au rapport de similitude.

Corollaire. — *Le rapport des périmètres de deux polygones semblables est égal au rapport de similitude.*

Ce fait résulte de la proportionnalité des côtés, à cause du théorème d'arithmétique : *Dans une suite de rapports égaux, la somme des numérateurs est à la somme des dénominateurs comme un numérateur est à son dénominateur.*

147. Théorème. — *Réciproquement, si deux polygones ont leurs angles égaux chacun à chacun, se succédant dans le même ordre, tous*

de même sens ou tous de sens contraire, et leurs côtés homologues proportionnels, ils sont semblables.

Soient deux polygones P (ABCDE) et P′ (A′B′C′D′E′) satisfaisant aux conditions de l'énoncé, de sorte qu'on a

$$\widehat{A} = \widehat{A'},\ \widehat{B} = \widehat{B'},\ \widehat{C} = \widehat{C'},\ \widehat{D} = \widehat{D'},\ \widehat{E} = \widehat{E'},$$

avec

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'D'}{CD} = \frac{D'E'}{DE} = \frac{E'A'}{EA}.$$

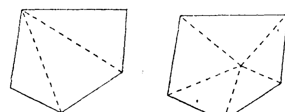
Prenons l'homothétique, par rapport à un point quelconque, du polygone P, le rapport d'homothétie étant égal à la valeur commune des rapports $\frac{A'B'}{AB}$, $\frac{B'C'}{BC}$, etc. Nous aurons ainsi un nouveau polygone P_1 ($A_1B_1C_1D_1E_1$), qui aura ses angles égaux (tous avec le même sens ou tous avec un sens inverse) et ses côtés égaux à ceux du polygone P′. Je dis qu'il lui est égal.

Tout d'abord on peut supposer que l'égalité des angles ait lieu avec conservation du sens (sans quoi on remplacerait le polygone P′ par son symétrique par rapport à une droite).

Dans ces conditions, transportons le polygone P′ (sans changer son sens de rotation) sur P_1, de manière que A′B′ coïncide avec son égal A_1B_1. L'égalité des angles $\widehat{B}$, $\widehat{B'}$, égalité qui a lieu avec identité de sens, montre que B′C′ prend la direction B_1C_1 et, comme ces deux lignes sont égales, elles coïncident. On déduirait de là, par le même procédé, la coïncidence de C′D′ avec C_1D_1 et ainsi de suite. Les deux polygones coïncident donc. C. Q. F. D.

148. *Tout polygone peut être décomposé en triangles, et cela d'une infinité de façons.* En effet :

1° Si le polygone est convexe, on pourra, par exemple, joindre un sommet à tous les autres (*fig.* 143) ou un point intérieur à tous les sommets (*fig.* 144) ;


Fig. 143 et 144.

2° Si le polygone n'est pas convexe (*fig.* 145), il peut être décomposé en polygones convexes (lesquels seront ensuite décomposés en triangles, comme il vient d'être dit).

A cet effet, on prolongera indéfiniment tous les côtés. On décomposera ainsi le plan en un certain nombre de régions (par exemple,

sur la figure 145, les régions numérotées de 1 à 16) telles qu'on ne puisse traverser aucun côté ou son prolongement sans changer de région et réciproquement. Chacune d'elles est tout entière intérieure ou tout entière extérieure au polygone (puisqu'on peut passer de l'un quelconque de ses points à un autre quelconque sans traverser de côté, prolongé ou non) et celui-ci est constitué par l'ensemble des régions qui lui sont intérieures (sur la figure 145, les régions numérotées de 1 à 3), lesquelles sont par définition des polygones convexes.

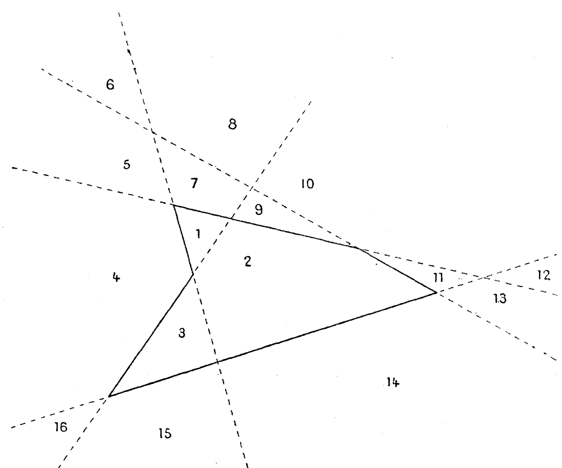


Fig. 145.

149. Théorème. — *Deux polygones semblables peuvent être décomposés en triangles semblables et semblablement disposés.*

Il suffit, en effet, après avoir ramené les deux polygones à l'homothétie, de diviser l'un d'eux en triangles et l'autre en triangles homothétiques des premiers.

Réciproquement, *deux polygones qui peuvent être décomposés en triangles semblables et semblablement disposés sont semblables.*

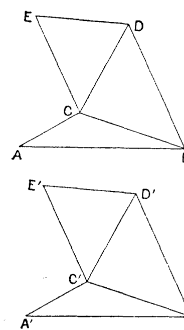


Fig. 146.

Tout d'abord, deux polygones composés de triangles égaux chacun à chacun et semblablement disposés sont égaux.

Soient en effet ABC, BCD, CDE (*fig.* 146), etc., des triangles composant un premier polygone P; A'B'C', B'C'D', C'D'E', etc., des triangles respectivement égaux aux premiers et semblablement disposés, composant un second polygone P'. Nous pouvons transporter la

seconde figure sur la première, de manière à faire coïncider le triangle A'B'C' avec son égal ABC. Dès lors le triangle B'C'D', égal à BCD, aura, dans sa nouvelle position, un côté commun BC avec ce dernier et sera situé semblablement par rapport au côté commun : il coïncidera donc avec BCD. On passerait de là, par le même raisonnement, à la coïncidence des deux triangles C'D'E', CDE, et ainsi de suite. Le polygone P' est donc égal au polygone P.

Dès lors, si deux polygones sont formés de triangles semblables et semblablement disposés, avec un rapport de similitude (1) k, en prenant l'homothétique du premier polygone avec ce même rapport de similitude k, nous formerons un polygone égal au second, d'après ce qui vient d'être dit.

150. Théorème. — *Si, sur les droites qui joignent un point fixe O à chaque point M d'une figure F, on construit des triangles semblables entre eux et de même sens, les troisièmes sommets M' de ces triangles forment une figure F' semblable à F.*

Car en faisant tourner la figure F autour du point O d'un angle égal à $\widehat{MOM'}$, on obtient une figure égale à F et homothétique à F' par rapport au point O.

150 *bis*. Réciproque. — *Étant données deux figures semblables et de même sens, il existe toujours un point tel que les triangles ayant pour sommets ce point et deux points homologues quelconques, soient tous semblables entre eux.*

En faisant tourner l'une des figures autour de ce point, on peut la rendre homothétique à l'autre par rapport au même point.

Soient les deux figures semblables et de même sens F, F', de sorte que F' est homothétique d'une figure F_1, égale à F et de même sens. Il en résulte tout d'abord que deux lignes homologues AB, A'B' (*fig.* 147) des deux figures font entre elles un angle constant (qu'on peut appeler *angle des deux figures*) : car cela a lieu pour les deux figures égales F, F, et la figure F' a toutes ses lignes parallèles aux lignes correspondantes de F_1. Ces lignes étant de

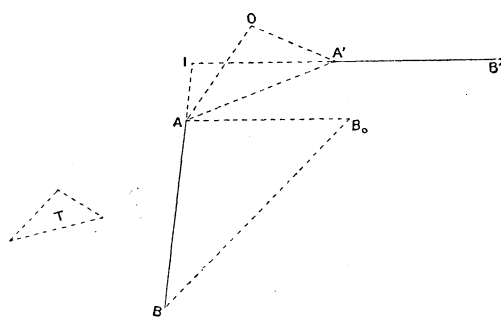


Fig. 147.

(1) Ce rapport est nécessairement le même pour deux triangles contigus, puisque ceux-ci ont, dans chaque figure, un côté commun ; il est donc le même pour tous les triangles.

plus proportionnelles, nous voyons que si par le point A nous menons une ligne AB_0 égale et parallèle à $A'B'$ et de même sens, le triangle ABB_0 sera, quels que soient les points A et B, semblable à un triangle fixe T, avec le même sens.

Cela posé, cherchons un point qui se corresponde à lui-même lorsqu'on le considère successivement comme appartenant à F et à F'. Soit O un tel point : si nous refaisons la construction précédente en prenant pour le point A le point O, le point B_0 coïncidera avec B', de sorte que le triangle OBB' doit être semblable au triangle T et de même sens. Il existe un point, et un seul, qui satisfasse à cette condition (1).

Inversement, le point O étant ainsi choisi, si on le regarde comme appartenant à la figure F, son homologue dans F' sera sur l'homologue de BO, laquelle n'est autre que B'O (puisqu'elle doit faire avec BO un angle égal à l'angle des deux figures), à une distance du point B' égale à B'O (puisque le rapport $\frac{B'O}{BO}$ est égal au rapport de similitude de deux figures). Le point O coïncide donc avec son homologue.

Dès lors tous les triangles tels que OBB' sont semblables au triangle T; de plus, si nous faisons tourner la figure F autour de O d'un angle égal à l'angle des deux figures, elle deviendra homothétique à F', avec O comme centre d'homothétie. C. Q. F. D.

Remarque. — Les deux angles $\widehat{AOA'}$, $\widehat{BOB'}$ devront être égaux à l'angle des droites AB, A'B'. Si donc nous prolongeons ces dernières jusqu'à leur rencontre en I, nous pourrons déterminer le point O par l'intersection des circonférences circonscrites aux triangles AIA', BIB'.

EXERCICES

155. Inscrire un carré dans un triangle.

156. On joint un point fixe A à un point variable B d'un cercle de centre O. Lieu de l'intersection de la droite AB avec la bissectrice de l'angle $\widehat{AOB}$.

157. Sur le côté Ox d'un angle donné $\widehat{xOy}$, on prend un point mobile M, et, sur OM comme diamètre, on décrit un cercle. On trace ensuite un cercle tangent au premier et aux côtés Ox, Oy. Lieu du point de contact des deux cercles.

158. Le point de concours G des médianes d'un triangle est sur la droite qui joint le centre du cercle circonscrit au point de rencontre des hauteurs et divise intérieurement cette droite dans le rapport de 1 à 2.

(On démontrera que ce point G est le centre d'homothétie des deux triangles ABC, A'B'C' qui figurent dans la démonstration du n° **53**, liv. I).

159. On considère trois figures homothétiques et on donne les rapports de similitude de ces trois figures prises deux à deux. Trouver le rapport dans lequel l'un des centres d'homothétie divise la droite qui joint les deux autres.

(1) La construction de ce point est indiquée plus loin (**152**, Constr. 3).

160. On donne deux parallèles et un point O dans leur plan. Par ce point, on mène une sécante mobile qui coupe les parallèles en A, A′. Lieu de l'extrémité d'une perpendiculaire menée à la sécante par le point A′ et d'une longueur égale à OA.

161. Soient F et F′ deux figures semblables (mais non égales) et de sens contraires. Montrer qu'on peut trouver, de deux façons différentes, une figure F″ symétrique de F par rapport à une droite et homothétique de F′ par rapport à un point de cette droite. Le centre d'homothétie est le même dans les deux cas ; mais les deux homothéties sont l'une directe, l'autre inverse.

162. Sur la droite qui joint deux points homologues quelconques de deux figures semblables et de même sens, on construit un triangle semblable à un triangle fixe T avec le même sens de rotation; ou encore on divise cette droite dans un rapport constant. Les troisièmes sommets des triangles ainsi construits forment une figure semblable aux deux premières.



CHAPITRE VI

CONSTRUCTIONS

151. Constr. 1. — *Diviser une droite en parties proportionnelles à des droites données, ou en parties égales.*

Première méthode (*fig.* 148). — Soit la droite AB à diviser, par

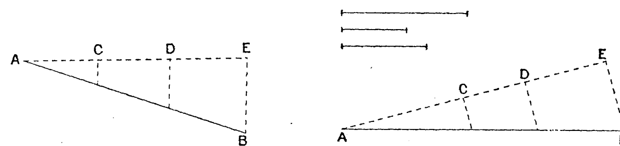


Fig. 148.

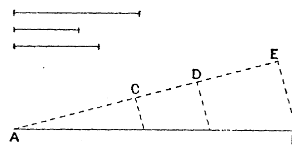


Fig. 149.

exemple, en trois parties égales. A partir du point A, sur une droite quelconque issue de ce point, on portera les trois segments égaux AC, CD, DE. Il suffira alors de joindre BE et de mener par les points C,D des parallèles à cette droite.

Ces parallèles diviseront AB en trois parties égales (**113**). S'il s'agissait de diviser AB en parties proportionnelles à trois lignes données (*fig.* 149), on prendrait AC, CD, DE respectivement égaux aux trois lignes en question.

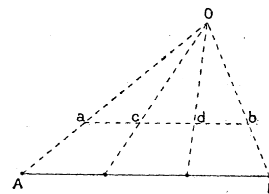


Fig. 150.

Deuxième méthode (*fig.* 150). — Soit encore AB à diviser en trois parties égales. Sur une parallèle quelconque *ab* à AB, on portera les segments égaux *ac*, *cd*, *db*, et l'on joindra A*a*, B*b* qui se couperont en O : les droites O*c*, O*d* diviseront AB en trois parties égales (**121**).

S'il s'agissait de diviser AB en parties proportionnelles à trois lignes données, on prendrait *ac*, *cd*, *db* égaux respectivement à ces lignes.

Constr. 2. — *Trouver la quatrième proportionnelle à trois droites données.*

Construction toute semblable à la précédente.

Première méthode (*fig.* 151). — Soient les trois droites données a, b, c et soit cherchée la ligne x telle que $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$. On portera les droites a, b à partir du sommet O d'un angle quelconque sur les deux côtés, en OA et OB; puis le segment c sera placé n'importe où sur le côté OA (sur la figure, en CC'). Les parallèles à AB menées par les extrémités de ce segment déterminent sur OB la quatrième proportionnelle cherchée.

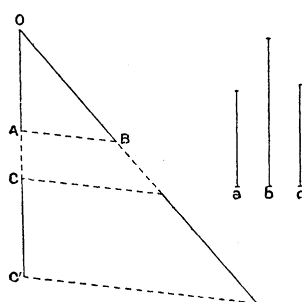


Fig. 151.

Afin de n'avoir qu'une parallèle à mener, on fait, en général, coïncider l'une des extrémités du segment c avec le point O ou le point A.

Nous laissons au lecteur le soin d'appliquer de même à cette construction la deuxième méthode indiquée pour la construction précédente.

152. Constr. 3. — *Construire sur une droite donnée un triangle semblable à un triangle donné.*

Soient le triangle donné ABC et la ligne donnée A_1B_1. On portera cette ligne en AD sur le côté AB; menant par le point D la parallèle DE à BC (*fig.* 152) jusqu'à rencontre en E avec AC, il ne restera plus qu'à construire sur A_1B_1 comme base un triangle égal à ADE (L. II, **86**, Constr. 4).

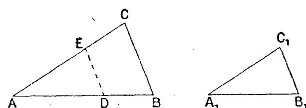


Fig. 152.

Cette construction donne évidemment la solution du problème suivant:

Problème. — *Étant donnés deux points* A, B *d'une figure* F *et leurs homologues* A′, B′ *dans une figure semblable* F′, *trouver l'homologue d'un troisième point quelconque de* F.

En particulier, son application répétée permettra d'effectuer la

Constr. 3 *bis.* — *Construire, sur une droite donnée, un polygone semblable à un polygone donné.*

153. Constr. 4. — *Construire la moyenne proportionnelle à deux droites.*

Nous avons énoncé trois théorèmes conduisant à des moyennes proportionnelles (**123**, **125**, **132**). Ces trois théorèmes nous fournissent chacun une méthode pour résoudre la question posée.

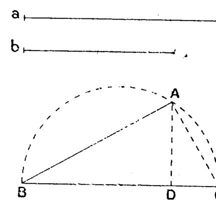


Fig. 153.

Première méthode (*fig.* 153). — On portera les lignes données *a*, *b* à partir d'un même point B sur une même droite, dans le même sens en BD, BC (en appelant BD la plus petite des deux). On considérera BC comme l'hypoténuse d'un triangle rectangle et BD comme la projection d'un côté sur l'hypoténuse. Il suffira pour cela de placer le sommet A de l'angle droit à l'intersection de la perpendiculaire élevée en D à BD et de la circonférence décrite sur BC comme diamètre. Le point A étant ainsi déterminé, AB sera la moyenne cherchée (**123**).

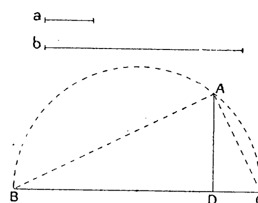


Fig. 154.

Deuxième méthode (*fig.* 154). — On portera les lignes données *a*, *b* en sens inverse à partir d'un même point D sur une même droite, en DB, DC, et on les considérera comme les projections des côtés d'un triangle rectangle sur l'hypoténuse. Il suffira pour cela de placer le point A, sommet de l'angle droit, à l'intersection de la perpendiculaire en D à BC et de la circonférence de diamètre BC. Le point A étant ainsi déterminé, AD sera la moyenne cherchée (**125**).

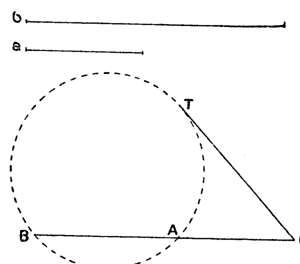


Fig. 155.

Troisième méthode (*fig.* 155). — Soit à trouver la moyenne proportionnelle entre deux lignes *a*, *b*. On portera ces deux lignes, à partir d'un même point O, sur une même droite, dans le même sens

en OA, OB. Par les points A,B on fera passer une circonférence quelconque à laquelle on mènera, du point O, une tangente OT. Ce sera la moyenne proportionnelle cherchée (**132**).

154. Constr. 5. — *Construire une ligne dont le carré soit égal à la somme des carrés de deux lignes données.*

On portera les deux lignes données sur les côtés d'un angle droit : la ligne cherchée sera l'hypoténuse du triangle rectangle ainsi formé.

Constr. 6. — *Construire une ligne dont le carré soit égal à la différence des carrés de deux lignes données.*

On construira (L. II, **87** *bis*, constr. 9) un triangle rectangle ayant la plus grande ligne pour hypoténuse et l'autre pour côté de l'angle droit : le second côté sera la ligne cherchée.

155. Constr. 7. — *Construire deux droites, connaissant leur somme et leur produit.*

Soit à chercher deux lignes dont la somme soit égale à une ligne donnée $a = \mathrm{BC}$ et le produit au produit de deux lignes données b, c : nous pouvons supposer ces dernières portées, dans un même sens, respectivement en BB′, CC′ sur les perpendiculaires élevées aux extrémités de BC (*fig.* 156). Les deux lignes cherchées, puisque leur somme est égale à BC, pourront être représentées par BM et CM, M étant un certain point de BC. Mais d'autre part le produit BM·CM doit être égal au produit BB′·CC′ : cette égalité peut s'écrire sous forme de proportion : $\frac{\mathrm{BB'}}{\mathrm{BM}} = \frac{\mathrm{CM}}{\mathrm{CC'}}$ et montre que les deux triangles rectangles B′BM, CC′M sont semblables. L'angle $\widehat{\mathrm{BMB'}}$, égal à son homologue $\widehat{\mathrm{MC'C}}$, est par suite complémentaire de $\widehat{\mathrm{CMC'}}$, de sorte que l'angle $\widehat{\mathrm{B'MC'}}$ est droit. Le point M sera donc sur la circonférence de diamètre B′C′.

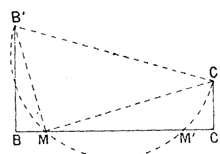


Fig. 156.

Réciproquement, si la circonférence de diamètre B′C′ coupe BC en un point M, les triangles BB′M, CC′M seront semblables comme ayant leurs côtés perpendiculaires, et il en résultera l'égalité des produits BM·CM et BB′·CC′.

Conditions de possibilité. — Nous avons pris les lignes b et c quelconques, mais nous pouvons les supposer égales entre elles : car on peut, sans changer le produit, les remplacer toutes deux par leur moyenne proportionnelle. Supposons donc $BB' = CC'$, de sorte que le quadrilatère $BB'CC'$ est un rectangle. Le milieu de $B'C'$ est alors à une distance de BC égale à BB', et le rayon de la circonférence est égal à la moitié de $B'C'$ ou, ce qui revient au même, de BC. Donc la circonférence coupera BC si BB' est au plus égal à la moitié de BC, c'est-à-dire si *le produit donné est au plus égal au carré de la moitié de* BC.

Si M est un point répondant à la question, en retournant le segment BC sur lui-même ou (ce qui revient au même) en prenant la figure symétrique par rapport au milieu de BC, on aura un point M' qui jouira de la même propriété que le premier, puisqu'on a $BM' = CM$, $BM = CM'$. On voit que les deux points M, M', intersections de la circonférence de diamètre $B'C'$ avec BC, sont symétriques par rapport au milieu de BC, ce que l'on peut vérifier directement à l'aide du n° **62**.

Si le produit donné est égal au carré de la moitié de BC (ce qui est la valeur la plus grande qu'il puisse prendre, d'après ce qui précède), la circonférence de diamètre $B'C'$ est tangente à BC ; les points M, M' sont confondus entre eux et, par suite, avec le milieu de BC, de sorte qu'on a $BM = CM$. On voit donc que *le produit de deux droites dont la somme est constante est maximum quand ces droites sont égales.*

Remarque. — Soit x le segment BM. On aura $CM = a - x$; et l'égalité $BM \cdot CM = BB' \cdot CC'$ s'écrira $x(a - x) = bc$, ou

$$x^2 - ax + bc = 0.$$

La construction précédente fournit donc le moyen de trouver une ligne x vérifiant l'équation

$$x^2 - ax + q = 0$$

où a est une ligne donnée, q le produit de deux lignes données.

Constr. 8. — *Construire deux droites, connaissant leur différence et leur produit.*

Soit à chercher deux droites dont la différence soit égale à une

ligne donnée $a = BC$ et le produit égal au produit de deux lignes données b, c : nous pouvons supposer ces dernières portées, en sens contraires, respectivement en BB′, CC′ sur les perpendiculaires élevées aux extrémités de BC (*fig.* 157). Les deux lignes cherchées, puisque leur différence est égale à BC, pourront être représentées par BM et CM, M étant un point pris sur l'un des prolongements de BC ; et l'on devra avoir $BM \cdot CM = BB' \cdot CC'$. Comme dans la construction précédente, on en conclura que le point M doit être sur la circonférence décrite sur B′C′ comme diamètre et qu'inversement un point d'intersection de cette circonférence avec BC prolongé répond à la question.

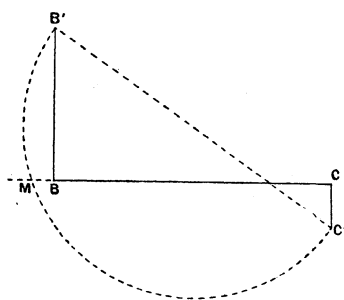


Fig. 157.

Comme les points B′, C′ sont de côtés différents de BC, la circonférence coupe toujours la droite, et par conséquent le problème est toujours possible.

Remarque. — Soit x le plus petit des deux segments ainsi trouvés ; l'autre sera $y = a + x$ et l'égalité $xy = bc$ pourra s'écrire, soit

$$x(a + x) = bc, \quad \text{ou} \quad x^2 + ax - bc = 0,$$

soit

$$(y - a)y = bc, \quad \text{ou} \quad y^2 - ay - bc = 0.$$

Nous avons donc le moyen de trouver une ligne satisfaisant à l'une quelconque des deux conditions

$$x^2 + ax - q = 0,$$
$$y^2 - ay - q = 0,$$

a étant une ligne donnée et q le produit de deux lignes données.

156. On dit qu'une droite est divisée *en moyenne et extrême raison*, lorsque le plus grand segment est moyen proportionnel entre la droite entière et l'autre segment.

Constr. 9. — *Diviser une droite en moyenne et extrême raison.*

Soit la droite donnée BC (*fig.* 158) sur laquelle il s'agit de trouver un point D tel que $\frac{BC}{BD} = \frac{BD}{CD}$.

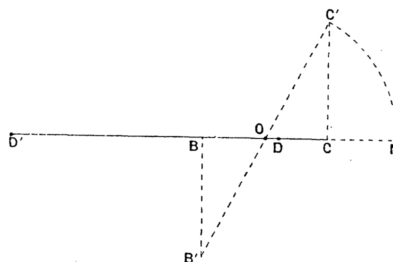


Fig. 158.

Dans la proportion précédente, ajoutons les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux. Il vient :

$$\frac{BC}{BD} = \frac{BC + BD}{BC}.$$

Nous voyons que les deux segments BD et BC + BD, dont la différence est égale à BC, ont pour produit $\overline{BC}^2$. Nous sommes donc ramenés à la construction précédente. Il faudra, aux deux extrémités de BC, élever en sens inverses des perpendiculaires BB',CC' égales à BC, puis, sur B'C' comme diamètre, décrire une circonférence qui coupera BC, prolongé du côté du point C, en un point M tel que BD = CM soit le segment cherché.

A partir du point B, portons, en sens inverse de BC, un segment BD' égal à BM. Le point D' ainsi obtenu jouit d'une propriété tout à fait analogue à celle du point D, à savoir : *sa distance au point* B *est moyenne proportionnelle entre sa distance au point* C *et la droite* BC. On a en effet BD' = BC + BD, de sorte que la proportion $\frac{BC}{BD} = \frac{BC + BD}{BC}$ s'écrit encore $\frac{BC}{BD} = \frac{BD'}{BC} = \frac{CD'}{BD'}$.

Le point D' est dit *diviser extérieurement* la droite BC *en moyenne et extrême raison* (1).

D'ailleurs, pour jouir de cette propriété, le point D' doit être choisi comme nous l'avons dit, car la proportion $\frac{BD'}{BC} = \frac{CD'}{BD'}$ donne inversement (par soustraction des numérateurs entre eux et des dénominateurs entre eux) $\frac{BD'}{BC} = \frac{BC}{BD' - BC}$, de sorte que BD' est l'un des segments dont la différence est BC et le produit $\overline{BC}^2$.

(1) Il est bien entendu que les deux points D,D' ne sont pas conjugués harmoniques par rapport à AB (voir exercice 173).

Soit BC $= a$: proposons-nous de calculer BD et BD′. Nous remarquerons d'abord que, à cause de l'égalité de BB′ et de CC′, la circonférence décrite sur B′C′ comme diamètre a pour centre le milieu O de BC, de sorte que OC $= \frac{a}{2}$. Le théorème du carré de l'hypoténuse, appliqué au triangle rectangle OCC′, montre alors que

$$OC' = OM \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2} = \sqrt{\frac{5}{4}a^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

On a donc :

$$CM = BD = a\,\frac{\sqrt{5}-1}{2},\ \text{et}\ BM = BD' = a\,\frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

157. Problème. — *Trouver le lieu géométrique des points tels que le rapport de leurs distances à deux droites données soit égal à un rapport donné.*

Soient les deux droites données D,D′, que nous supposerons concourantes en un point O (*fig.* 159) : nous cherchons le lieu des points dont les distances à ces deux droites soient entre elles comme deux lignes données d,d'. Si M est un point du lieu, tout point M′ de la droite OM fait également partie de ce lieu ; car les perpendiculaires abaissées du point M sur D,D′ et les perpendiculaires abaissées du point M′ sur ces mêmes droites forment évidemment deux figures homothétiques par rapport au centre d'homothétie O. De là résulte que le lieu se compose de droites passant par O. D'ailleurs nous pouvons obtenir des points de ce lieu en cherchant les points dont les distances à D,D′ soient respectivement égales à d, d'. Nous savons que le lieu des points situés à la distance d de

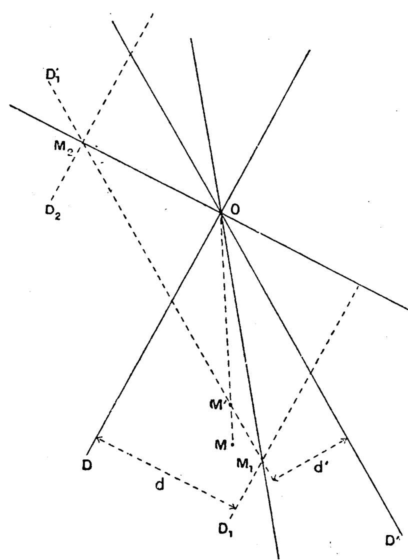


Fig. 159.

la droite D se compose de deux droites D_1, D_2 parallèles à D; de même le lieu des points dont la distance à D′ est d', se compose de deux droites D'_1, D'_2 parallèles à D′. Soient M_1, M_2 les points d'intersection de D_1 et de D_2 avec D'_1. Les droites OM_1, OM_2 font partie du lieu. Elles le constituent d'ailleurs tout entier : car si M est un point de ce lieu, la droite OM coupe D'_1 en un point M′ qui, étant à la distance d' de D′, doit être à la distance d de D et par suite coïncider, soit avec M_1, soit avec M_2.

Si les deux droites D, D′, étaient parallèles, il y aurait deux points du lieu sur une perpendiculaire commune quelconque [1] : ce seraient les deux points conjugués qui diviseraient cette perpendiculaire dans le rapport donné. Le lieu se composerait des parallèles menées par ces deux points aux droites données.

Constr. 10. — *Construire les points dont les distances à trois droites données ont des rapports donnés.*

On construira d'abord les deux droites, lieux des points dont les distances aux deux premières droites données aient entre elles le premier rapport donné ; puis on opérera de même avec les deux dernières droites données. On aura ainsi deux nouvelles droites, qui couperont les premières en quatre points répondant à la question.

158. Constr. 11. — *Mener les tangentes communes à deux cercles.*

Nous avons résolu ce problème au n° **93**, livre II. Les théorèmes précédents nous permettent d'en donner une solution toute différente. Il suffira en effet de tracer deux rayons parallèles, de manière à déterminer les centres de similitude (**143**) et de mener, par l'un quelconque de ces points, une tangente à l'une des circonférences : elle sera aussi tangente à l'autre, en vertu de l'homothétie de ces deux figures.

Constr. 12. — *Tracer l'axe radical de deux cercles.*

Si ces deux cercles sont sécants ou tangents, on n'aura qu'à tracer la corde commune ou la tangente commune.

Sinon, on les coupera par un troisième cercle quelconque. Le point d'intersection des deux cordes communes appartiendra (**139**) à

(1) Il y a exception si le rapport donné est égal à l'unité. Il n'y a alors qu'un seul point de division, le milieu de la perpendiculaire commune ; l'autre étant rejeté à l'infini.

l'axe radical cherché. On mènera par ce point une perpendiculaire à la ligne des centres ; ou encore, on recommencera la construction de manière à déterminer un second point.

Remarque. — Appliquée à une circonférence et à une droite, la construction précédente conduit à admettre que l'*axe radical d'une circonférence et d'une droite est la droite elle-même.*

Cette construction s'applique encore si l'un des cercles se réduit à un point, pourvu que l'on fasse passer le cercle auxiliaire par ce point.

On déduit immédiatement de la construction précédente la recherche du centre radical de trois cercles donnés, et par conséquent aussi (**139**) la

Constr. 13. — *Tracer le cercle orthogonal à trois cercles donnés,* avec ses cas particuliers :

Tracer, par un point donné, un cercle orthogonal à deux cercles donnés ;

Tracer, par deux points donnés, un cercle orthogonal à un cercle donné.

159. Constr. 14. — *Décrire une circonférence passant par deux points donnés et tangente à une droite donnée.*

Soient les deux points A, B (*fig.* 160) et la droite xy ; soit T le point de contact, avec xy, d'une circonférence répondant à la question. Prolongeons AB jusqu'à sa rencontre en I avec xy. La longueur IT est connue, car elle est moyenne, proportionnelle entre IA et IB.

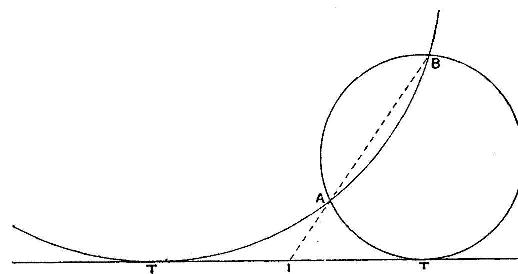


Fig. 160.

Inversement, si le point T vérifie cette condition, il existe (**132**), une circonférence passant par A et B et tangente en T à xy : on la déterminera par la construction 13, n° **90**, livre II.

Comme on peut reporter la moyenne proportionnelle entre IA et IB dans deux sens différents à partir du point I sur xy, il existe deux circonférences répondant à la question.

Le problème n'est évidemment possible que si A et B sont du même côté de xy.

Constr. 15. — *Décrire une circonférence passant par deux points donnés et tangente à une circonférence donnée.*

Soient les deux points A, B (*fig.* 161) et la circonférence C. Cherchons encore le point de contact T de la circonférence demandée.

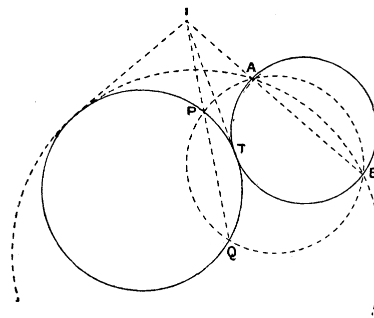


Fig. 161.

Pour cela, soit I le point de rencontre de AB avec la tangente en T. Par les points A, B faisons passer une circonférence quelconque qui coupe C aux points P, Q. Le point I se trouve sur la droite PQ (**139**).

L'intersection de AB avec PQ faisant connaître le point I, il suffira de mener, par ce point, les tangentes à C. Le problème a par conséquent deux solutions.

Condition de possibilité. — Il faut que le point I soit extérieur à C. Pour cela il est nécessaire et suffisant que ce point soit sur un des prolongements de PQ, c'est-à-dire extérieur à la circonférence auxiliaire. C'est ce qui se produira quand A et B seront tous deux sur un seul des deux arcs déterminés par PQ dans cette circonférence, c'est-à-dire *lorsque* A *et* B *seront tous deux intérieurs ou tous deux extérieurs à la circonférence donnée.*

EXERCICES

163. Trouver une droite qui soit, avec une droite donnée, dans le rapport des carrés de deux droites données.

164. Trouver une droite dont le carré soit, avec le carré d'une droite donnée, dans le rapport de deux droites données.

165. Mener, d'un point donné, une droite que deux droites (ou circonférences) données divisent dans un rapport donné.

165 *bis*. Par un point extérieur à un cercle, mener une sécante que ce cercle divise en moyenne et extrême raison.

166. Mener, à deux cercles donnés, deux tangentes parallèles telles que leurs distances à un point donné P soient entre elles comme 1 est à 2.

167. Trouver un point d'où l'on voie sous des angles égaux trois segments consécutifs AB, BC, CD d'une même droite.

168. Par deux points situés sur le même diamètre d'un cercle, mener deux cordes égales qui se coupent sur la circonférence.

169. Construire un triangle, connaissant deux côtés et la bissectrice de l'angle compris.

170. Construire un triangle, connaissant un côté, la hauteur correspondante et le produit des deux autres côtés.

171. Construire un triangle, connaissant les angles et le périmètre; ou les angles et la somme des médianes; ou les angles et la somme des hauteurs, etc.

172. Construire un carré, connaissant la différence entre la diagonale et le côté.

173. Le conjugué harmonique du point B par rapport au segment DD′ (fig. 158, nº **156**) s'obtient en prolongeant la ligne BC d'une longueur égale à elle-même.

Le conjugué harmonique du point D′ par rapport au segment BC est le symétrique du point D par rapport au milieu de BC.

Montrer également que le cercle décrit sur DD′ comme diamètre passe par les sommets (autres que B et C) du carré qui a BC pour diagonale.

174. Étant donnés une droite et deux points A, B, trouver sur la droite un point d'où l'on voie la distance AB sous le plus grand angle possible.

On traitera ce problème par la méthode *indirecte*, qui consiste à chercher d'abord sur la droite un point d'où l'on voie AB sous un angle donné, et à examiner quelle est la plus grande valeur de l'angle donné pour laquelle le problème est possible.

On opérera de même pour les deux exercices suivants.

175. Mener à deux parallèles données une perpendiculaire commune qui soit vue d'un point donné sous le plus grand angle possible.

175 *bis*. Plus généralement, mener, par un point donné une droite dont la portion comprise entre deux parallèles données soit vue, d'un autre point donné extérieur aux parallèles, sous le plus grand angle possible.

176. Par deux points, mener un cercle qui intercepte sur une droite donnée une corde de longueur donnée. — Minimum de cette longueur, lorsque les points sont de part et d'autre de la droite.

177. Par un point donné, tracer le cercle qui a, avec deux cercles donnés, même axe radical.

CHAPITRE VII

POLYGONES RÉGULIERS

160. On nomme *polygone régulier* un polygone convexe dont tous les côtés sont égaux et tous les angles égaux.

On nomme *ligne brisée régulière* une ligne brisée dont tous les côtés sont égaux, tous les angles égaux et de même sens.

161. Théorème. — *Lorsqu'on divise une circonférence en un nombre quelconque* n *de parties égales:*

1° *Les points de division sont les sommets d'un polygone régulier;*

2° *Les tangentes en ces points sont les côtés d'un second polygone régulier.*

1° Deux côtés consécutifs du polygone qui a pour sommets les points de division sont évidemment symétriques l'un de l'autre par rapport au rayon qui va à leur sommet commun; deux angles consécutifs du même polygone sont symétriques par rapport au rayon perpendiculaire à leur côté commun;

2° Deux angles consécutifs du polygone formé par les tangentes aux points de division sont évidemment symétriques par rapport au rayon perpendiculaire à leur côté commun; deux côtés consécutifs de ce polygone, par rapport au rayon perpendiculaire à la corde qui joint leurs points de contact.

162. Théorème. — *Réciproquement, tout polygone régulier — ou, plus généralement, toute ligne brisée régulière — est inscriptible à un cercle et circonscriptible à un autre cercle.*

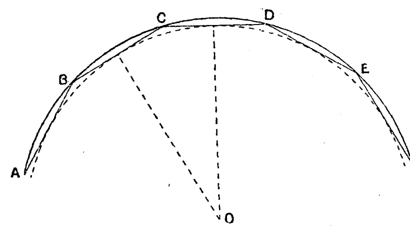


Fig. 162.

Soit, par exemple, la ligne brisée régulière ABCDEF (*fig.* 162).

Circonscrivons au triangle ABC une circonférence, dont le centre O sera sur la perpendiculaire au milieu de BC. Je dis que cette circonférence passera aussi par le point D. Il suffit, pour le démontrer, de remarquer que les côtés BA, CD sont symétriques l'un de l'autre par rapport à la perpendiculaire au milieu de BC, attendu que le symétrique de BA coïncide avec CD en direction (à cause de l'égalité des angles en B et en C) et en grandeur (puisque BA = CD). On a donc bien OA = OD. On verrait pareillement que cette même circonférence, circonscrite au triangle BCD, passe par le point E; et ainsi de suite.

D'ailleurs les côtés AB, BC, etc., étant cordes égales de la circonférence précédente, sont également distants du centre ; par suite, la ligne brisée est circonscriptible à une seconde circonférence de centre O.

Le rayon de ce second cercle, ou distance d'un côté quelconque au centre, a reçu le nom d'*apothème* de la ligne brisée régulière (ou du polygone régulier).

Remarque. — *Tout polygone régulier de n côtés peut être superposé à lui-même par des rotations* (à savoir celles dont l'angle est mesuré par un certain nombre de fois le n^{me} de la circonférence) *et par des symétries* (les symétries par rapport aux perpendiculaires aux milieux des côtés ou aux bissectrices des angles).

163. Nous venons de constater l'existence d'une infinité de polygones réguliers d'un nombre donné quelconque n de côtés. Nous allons démontrer que ces différents polygones sont semblables entre eux.

Théorème. — *Deux polygones réguliers d'un même nombre de côtés sont semblables, et le rapport de similitude est égal au rapport des rayons et à celui des apothèmes.*

En effet, deux polygones réguliers d'un même nombre de côtés inscrits dans deux cercles égaux, sont évidemment égaux : ils coïncident dès qu'on fait coïncider les circonférences circonscrites et un sommet.

Donc, étant donnés deux polygones réguliers P et P′ inscrits dans les cercles C et C′, en coupant les rayons du cercle C qui aboutissent aux sommets de P par une circonférence concentrique à C et égale

à C′, on obtiendra un polygone régulier homothétique à P, par rapport au centre de C, et égal à P′.

Remarque. — En particulier, tous les polygones réguliers d'un même nombre de côtés n ont le même angle. Il est facile de calculer cet angle. Puisque la somme des angles d'un quelconque de ces polygones est de $2n-4$ droits, chacun d'eux en sera la n^{me} partie et sera mesuré, par rapport à l'angle droit, par le nombre $2-\frac{4}{n}$.

164. Après avoir divisé une circonférence en n parties égales, joignons les points de division de p en p jusqu'à ce que nous revenions à un point déjà obtenu. Si P est le premier sommet que l'on retrouve ainsi, ce sommet P ne peut être que le point de départ; car s'il était l'extrémité d'un côté NP, déjà parcouru dans le sens NP, il est clair qu'on serait retombé sur le point N avant de retomber sur le point P.

La figure ainsi tracée a reçu le nom de *polygone régulier étoilé*. Par exemple, la figure 163 représente le pentagone régulier étoilé obtenu en divisant la circonférence en cinq parties égales aux points A, B, C, D, E et joignant ces points deux à deux dans l'ordre A C E B D A ($n=5$; $p=2$).

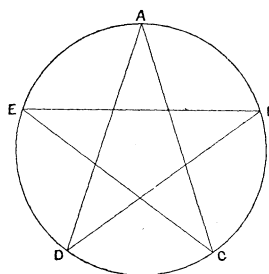


Fig. 163.

On peut supposer n et p premiers entre eux. Si, en effet, ces nombres avaient un plus grand commun diviseur d, tout se passerait comme si l'on avait divisé la circonférence en $\frac{n}{d}$ parties égales, pour joindre les points de division de $\frac{p}{d}$ en $\frac{p}{d}$.

n et d étant premiers entre eux, le polygone étoilé aura exactement n côtés. En effet, puisque chaque côté comprend p divisions, nous aurons, en traçant k côtés, franchi kp divisions. Nous reviendrons au point de départ si nous avons ainsi parcouru un nombre exact de circonférences, c'est-à-dire si kp est un multiple de n. On montre en arithmétique (1) que cette circonstance se produit pour

(1) Voir Tannery, *Leçons d'Arithmétique*, chap. IV.

certaines valeurs de k plus petites que n, si p n'est pas premier avec n, mais que si, au contraire, p est premier avec n, le fait se présente pour la première fois pour $k = n$.

On formera donc les polygones étoilés de n côtés en divisant la circonférence en n parties égales et joignant les points de division de p en p, où p est un nombre quelconque premier avec n et inférieur à n. Toutefois, chaque polygone étoilé est ainsi obtenu de deux façons différentes ; car, si son côté est la corde d'un arc comprenant p divisions, il est aussi la corde d'un arc comprenant $n - p$ divisions. Par exemple, le polygone étoilé de la figure 163 peut être obtenu, soit en joignant les points de division de deux en deux, soit en les joignant de trois en trois. De ce chef, la moitié des valeurs de p sont à rejeter si l'on ne veut trouver qu'une fois chaque polygone.

La valeur $p = 1$ (et, par conséquent, aussi la valeur $p = n - 1$) correspondent au polygone convexe.

Exemple. Soit $n = 15$. Outre 1 et 14, les nombres inférieurs à 15 et premiers avec lui sont 2, 4, 7, 8, 11, 13. On n'aura pas à considérer les valeurs $p = 8, 11, 13$, qui correspondent respectivement aux mêmes polygones que les valeurs 7, 4, 2. Il y a donc un pentédécagone régulier convexe et trois pentédécagones étoilés.

165. Inscription des polygones réguliers dans le cercle.

Lorsqu'on sait inscrire un polygone régulier, on sait aussi circonscrire au même cercle le polygone régulier d'un même nombre de côtés.

Ce dernier sera formé par les tangentes au cercle menées par les sommets du premier.

Lorsqu'on sait inscrire un polygone régulier, on sait inscrire le polygone régulier d'un nombre de côtés double.

Il suffit de diviser en deux parties égales l'arc intercepté par le côté du premier polygone.

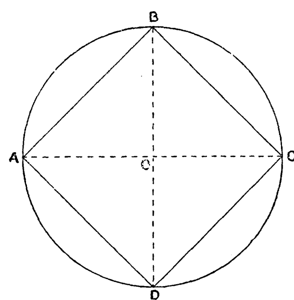


Fig. 164.

166. Carré. — Pour inscrire un carré dans un cercle O (*fig.* 164), il suffit de mener deux diamètres perpendiculaires AC, BD : la circonférence est ainsi divisée en quatre parties égales.

La remarque précédente permet ensuite de construire l'octogone régulier inscrit, puis les polygones réguliers de 16, 32...., en général, de 2^n côtés.

Le côté du carré inscrit au cercle de rayon R *est* $c_4 = R\sqrt{2}$.

Car, dans le triangle rectangle AOB (*fig.* 164), on a

$$\overline{AB}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{BO}^2 = \overline{2R}^2$$

L'apothème d'un polygone régulier inscrit dont on connaît le côté, se calcule par la règle suivante : *le carré de l'apothème est égal au carré du rayon du cercle circonscrit, moins le carré du demi-côté.* Cela résulte de ce que l'apothème, le demi-côté et le rayon forment un triangle rectangle.

Ainsi l'apothème a du polygone de côté c inscrit au cercle de rayon R est $a = \sqrt{R^2 - \frac{c^2}{4}}$.

Pour le carré, cette apothème est

$$a_4 = \sqrt{R^2 - \frac{c_4^2}{4}} = \sqrt{R^2 - \frac{2R^2}{4}} = \frac{R\sqrt{2}}{2}.$$

Elle est égale à la moitié du côté, ce qui était évident *à priori*.

167. Hexagone.

Théorème. — *Le côté de l'hexagone régulier est égal au rayon du cercle.*

Soit AB (*fig.* 165) le côté de l'hexagone régulier inscrit à un cercle de centre O. Je dis que le triangle OAB est équilatéral.

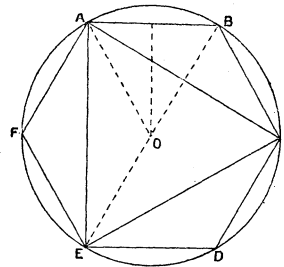


FIG. 165.

Tout d'abord ce triangle est isoscèle. D'autre part, l'angle en O, interceptant entre ses côtés le sixième de la circonférence, est égal aux $\frac{4}{6}$ ou aux $\frac{2}{3}$ de l'angle droit. Il reste donc $2\,dr - \frac{2}{3}\,dr = \frac{4\,dr}{3}$ pour la somme des angles en A et en B. Ces deux angles étant égaux

entre eux, chacun d'eux est égal à $\frac{2\,dr}{3}$. Le triangle est équiangle et, par suite, équilatéral.

L'apothème de l'hexagone régulier inscrit est

$$a_6 = \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{4}} = \frac{R\sqrt{3}}{2}.$$

Triangle équilatéral. — En joignant de deux en deux les sommets de l'hexagone, on formera le triangle équilatéral inscrit ACE (*fig.* 165).

Le côté AC de ce triangle, étant perpendiculaire au rayon OB, est égal au double de la hauteur du triangle AOB, c'est-à-dire (puisque les trois hauteurs de ce triangle équilatéral sont égales) au double de l'apothème de l'hexagone, soit $c_3 = R\sqrt{3}$.

C'est ce qui se voit encore en remarquant que B et E sont diamétralement opposés (comme comprenant entre eux trois sixièmes de circonférence). Le triangle ABE est donc rectangle en A et le côté AE est double de la perpendiculaire abaissée du milieu O de BE sur AB.

L'apothème du triangle équilatéral inscrit est $a_3 = \frac{R}{2}$.

Sachant construire l'hexagone inscrit, on en déduira l'inscription des polygones de 12, 24,...., 3×2^n côtés.

168. Décagone.

Théorème. *Le côté du décagone régulier inscrit est égal au plus grand segment du rayon divisé en moyenne et extrême raison.*

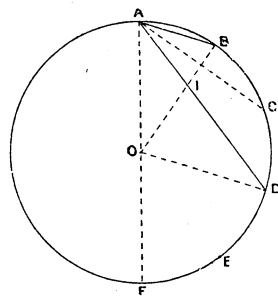


Fig. 166.

Soit AB (*fig.* 166) le côté du décagone régulier inscrit à un cercle de centre O. L'angle en O est les $\frac{4}{10}$ ou les $\frac{2}{5}$ de l'angle droit. La somme des angles en A et B est donc $2\,dr - \frac{2\,dr}{5} = \frac{8}{5}\,dr$ et chacun d'eux vaudra $\frac{4}{5}$ d'angle droit. Menons alors la bissectrice AI de l'angle en A (I étant l'intersection de cette bissectrice avec OB), laquelle

fait avec OA et AB des angles de $\frac{2}{5} dr$. L'angle $\widehat{AIB}$, extérieur au triangle AIO, est égal à la somme de deux angles intérieurs non adjacents, soit ici $\frac{4}{5}$ de droit. Il en résulte que les deux triangles AIB, AIO sont isoscèles et que l'on a $AB = AI = IO$. La propriété de la bissectrice (**115**), soit $\frac{OI}{IB} = \frac{OA}{AB}$, s'écrit alors

$$\frac{OI}{IB} = \frac{OB}{OI}.$$

C. Q. F. D.

On déterminera donc le côté du décagone régulier inscrit par la construction 9, n° **156**.

Ce côté est :

$$c_{10} = R\,\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

et l'apothème :

$$a_{10} = \sqrt{R^2 - R^2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2} = \frac{R}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}.$$

169. Outre le décagone régulier convexe, il existe un décagone régulier étoilé, obtenu en joignant les sommets du premier de trois en trois.

On retrouve la construction du côté du décagone convexe et on obtient celle du côté du décagone étoilé par la proposition suivante :

Théorème. — *La différence des côtés des deux décagones réguliers inscrits est égale au rayon et leur produit est égal au carré du rayon.*

Soit encore AB (*fig.* 166) le côté du décagone régulier convexe, de sorte que la demi-circonférence AF est divisée en 5 parties égales aux points B, C, D, E. AD est le côté du décagone étoilé ; d'ailleurs la droite AD coïncide avec la bissectrice AI de l'angle OAB, car les deux angles inscrits $\widehat{FAD}$, $\widehat{DAB}$ interceptent sur la circonférence des arcs égaux. Le rayon OD est parallèle à AB, puisque les angles alternes-internes $\widehat{ODA}$, $\widehat{DAB}$ sont tous deux égaux à $\widehat{OAD}$. Les deux triangles AIB, DOI sont donc semblables ; il sont d'ailleurs tous deux isoscèles, comme nous l'avons vu au numéro précédent. On a donc bien, tout d'abord, $AD - AB = AD - AI = ID = OD$.

Quant à la relation $AB \cdot AD = AI \cdot AD = \overline{OA}^2$, elle résulte de la similitude des triangles AIO, AOD, qui sont équiangles.

On voit donc que les côtés des deux décagones réguliers correspondent aux deux divisions (intérieure et extérieure) du rayon en moyenne et extrême raison, obtenues dans la construction 9.

Le côté du décagone étoilé est $c'_{10} = R\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ et son apothème,

$$a'_{10} = \sqrt{R^2 - R^2\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^2} = \frac{R}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}.$$

170. Pentagone. — En joignant de deux en deux les sommets du décagone régulier, on obtient le pentagone régulier convexe.

En joignant de deux en deux les sommets de celui-ci, ce qui revient à joindre de quatre en quatre les sommets du décagone, on obtient le pentagone régulier étoilé.

Le côté AC du pentagone régulier convexe est double de la hauteur abaissée du point A dans le triangle AOB (*fig.* 166). On peut donc le calculer, connaissant le côté du décagone, puisqu'on sait calculer les hauteurs d'un triangle dont on connaît les trois côtés. Mais on peut se dispenser de ce calcul en remarquant que *le côté du pentagone convexe est double de l'apothème du décagone étoilé.* C'est ce qui se voit, soit dans le triangle isoscèle AIO, dont les deux hauteurs (c'est-à-dire le demi-côté du pentagone convexe et l'apothème du décagone étoilé) sont égales, soit dans le triangle rectangle ADF, dont le côté DF est égal au côté du pentagone et la parallèle menée par le point O à ce côté, à l'apothème du décagone étoilé. Le côté et l'apothème du pentagone régulier convexe sont donc :

$$c_5 = 2a'_{10} = \frac{R}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} \quad \text{et} \quad a_5 = \frac{R}{4}\left(\sqrt{5}+1\right).$$

On verrait de même, par la considération du triangle rectangle ABF, que le côté du pentagone étoilé est double de l'apothème du décagone convexe, soit

$$c'_5 = \frac{R}{2}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} \quad , \quad a'_5 = \frac{R}{4}\left(\sqrt{5}-1\right).$$

Remarque. — D'une façon générale, le même raisonnement prouve que le calcul du côté et de l'apothème du polygone (convexe ou étoilé), obtenu en divisant la circonférence en $2n+1$ parties égales et joignant les points

de division de p en p, revient au calcul de l'apothème et du côté du polygone obtenu en divisant la circonférence en $4n+2$ parties et joignant les points de divisions de q en q, si le nombre q a été déduit de p par la relation (1)

$$\frac{p}{2n+1}+\frac{q}{4n+2}=\frac{1}{2}, \text{ ou } 2p+q=2n+1.$$

171. Pentédécagone. — Soit encore à inscrire le pentédécagone régulier.

Nous saurons inscrire ce polygone, une fois construits l'hexagone et le décagone, à l'aide du théorème suivant :

Théorème. — *L'arc intercepté par le côté du pentédécagone régulier inscrit est la différence des arcs interceptés par le côté de l'hexagone et par celui du décagone.*

En effet, cet arc est égal au $15^{\text{ème}}$ de la circonférence et la fraction $\frac{1}{15}$ est égale à la différence $\frac{1}{6}-\frac{1}{10}$.

On portera donc sur le cercle, à partir d'un même point A (*fig.* 167), deux ouvertures de compas AB, AC égales, l'une au côté de l'hexagone, l'autre au côté du décagone. BC sera le côté cherché.

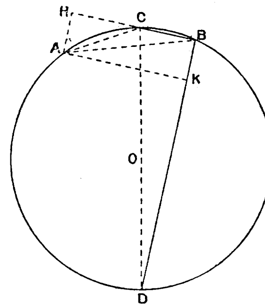


Fig. 167.

Outre le pentédécagone régulier convexe, il existe trois pentédécagones étoilés (**164**) dont les côtés interceptent respectivement les $\frac{2}{15}$, les $\frac{4}{15}$ et les $\frac{7}{15}$ de la circonférence. Ces arcs, que l'on peut évidemment déduire du premier, s'obtiennent d'ailleurs par des constructions tout à fait analogues à celle du pentédécagone convexe.

L'arc intercepté par le côté du premier pentédécagone étoilé est la différence des arcs interceptés par le côté du décagone étoilé et celui de l'hexagone;

(1) Inversement, cette remarque permet de ramener le calcul relatif à un polygone de $4n+2$ côtés au calcul d'un polygone de $2n+1$ côtés. Car un polygone de $4n+2$ côtés correspond à un nombre q impair (**164**); $2n+1-q$ sera dès lors pair et la relation $2p=2n+1-q$ fera connaître un entier p, premier avec $2n+1$ et auquel correspondra un polygone de $2n+1$ côtés dont il suffira de calculer le côté de l'apothème. Ainsi le calcul fait pour les pentédécagones (**174-175**) fait connaître les résultats relatifs aux polygones de 30 côtés.

L'arc intercepté par le côté du second pentédécagone étoilé est la somme des arcs interceptés par le côté du décagone convexe et celui de l'hexagone;

L'arc intercepté par le côté du troisième pentédécagone étoilé est la somme des arcs interceptés par le côté du décagone étoilé et celui de l'hexagone.

On a, en effet, les égalités

$$\frac{2}{15}=\frac{3}{10}-\frac{1}{6},$$
$$\frac{4}{15}=\frac{1}{10}+\frac{1}{6},$$
$$\frac{7}{15}=\frac{3}{10}+\frac{1}{6}.$$

172. Plus généralement, *quand on sait inscrire les polygones réguliers de m côtés et de n côtés, les nombres m et n étant premiers entre eux, on sait inscrire le polygone régulier de mn côtés.*

En effet, les côtés des deux polygones connus interceptent des arcs égaux respectivement au $m^{\text{ème}}$ et au $n^{\text{ème}}$ de la circonférence. En reportant p fois de suite le premier arc et en en retranchant q fois le second, on obtiendra l'arc intercepté par le côté du polygone cherché, si les entiers p et q satisfont à la relation

$$\frac{p}{m}-\frac{q}{n}=\frac{1}{mn}$$

ou

$$np-mq=1.$$

Or on démontre en arithmétique [1] que cette relation est impossible si m et n ont un diviseur commun, mais que, si m et n sont premiers entre eux, il existe toujours deux entiers p et q qui la vérifient, et on apprend à calculer ces entiers.

Par exemple, les dodécagones réguliers s'inscrivent immédiatement à l'aide du carré et du triangle, puisqu'on a $\frac{1}{12}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$, $\frac{5}{12}=\frac{2}{3}-\frac{1}{4}$.

La remarque du nº **170** est un cas particulier de la précédente, correspondant au cas où, des deux nombres m et n, l'un est égal à deux et l'autre impair.

173. Le géomètre *Gauss* a démontré qu'on peut inscrire à l'aide de la règle et du compas tout polygone régulier dont le nombre de côtés est un nombre premier de la forme 2^n+1. C'est ainsi que nous avons pu inscrire le triangle $(2+1=3)$ et le pentagone $(2^2+1=5)$ régulier. Viennent ensuite les polygones de $17\ (=2^4+1)$, $257\ (=2^8+1)$, etc., côtés.

(1) Tannery, *Leçons d'Arithmétique*, chap. XIV, nº 511.

En combinant cette proposition avec celles que nous avons obtenues, nous voyons qu'on peut inscrire à l'aide de la règle et du compas le polygone régulier de N côtés si le nombre N, décomposé en ses facteurs premiers, ne comprend que : 1° des facteurs premiers de la forme $2^n + 1$, *tous distincts entre eux;* 2° le facteur 2 à une puissance quelconque.

On démontre que, réciproquement, l'inscription ne peut se faire à l'aide de la règle et du compas si le nombre N n'appartient pas à la catégorie que nous venons de définir.

Ainsi le polygone régulier de 170 ($= 2 \times 5 \times 17$) côtés peut être inscrit; mais non le polygone de 9 côtés : car le nombre 9 est bien égal à une puissance de 2, augmentée de 1, mais ce n'est pas un nombre premier; et, d'autre part, les facteurs premiers dont il est composé ($9 = 3 \times 3$) sont bien de la forme $2^n + 1$, mais sont égaux entre eux.

174. Pour calculer le côté du pentédécagone régulier convexe, inscrit au cercle de rayon R, soient encore AB, AC (*fig.* 167) les côtés de l'hexagone et du décagone inscrits, de sorte que BC est le côté cherché. Du point A, abaissons sur BC la perpendiculaire AH; on aura $BC = BH - CH$.

Or l'angle $\widehat{ABH}$, en sa qualité d'angle inscrit interceptant l'arc AC, est égal au demi-angle au centre correspondant au décagone, de sorte que BH est l'apothème du décagone ordinaire inscrit au cercle de rayon AB : d'où

$$BH = \frac{AB}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}} = \frac{R}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}},$$

puisque $AB = R$.

De même l'angle $\widehat{ACH}$, égal à l'angle inscrit qui intercepte l'arc ACB (puisque tous deux sont supplémentaires de $\widehat{ACB}$), est égal au demi-angle au centre correspondant à l'hexagone régulier, de sorte que CH est l'apothème de l'hexagone régulier inscrit au cercle de rayon AC, soit

$$CH = \frac{AC\sqrt{3}}{2} = R\,\frac{(\sqrt{5}-1)}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

et par conséquent

$$BC = \frac{R}{4}\left[\sqrt{10+2\sqrt{5}} - \sqrt{3}\,(\sqrt{5}-1)\right].$$

Il est clair que la méthode précédente s'appliquera toutes les fois

qu'on aura à résoudre le problème suivant : *connaissant les cordes de deux arcs d'une circonférence de rayon donné, trouver la corde de l'arc égal à leur différence.*

En particulier, pour calculer le côté du premier pentédécagone étoilé, nous recommencerons le même raisonnement en remplaçant le côté et l'apothème du décagone convexe par le côté et l'apothème du décagone étoilé. Le côté cherché sera par conséquent

$$R\,\frac{\sqrt{5}+1}{2}\,\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{R}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}=\frac{R}{4}\left[(\sqrt{5}+1)\sqrt{3}-\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right].$$

Soit maintenant à calculer le côté du second pentédécagone étoilé. Soient encore AB, AC′ les côtés de l'hexagone et du décagone convexe, mais portés, cette fois, en sens inverses sur le cercle, de sorte que BC′ est le côté cherché (*fig.* 167 *bis*).

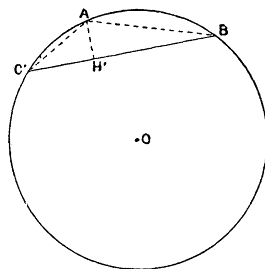


Fig. 167 *bis*.

Du point A, abaissons de même sur BC′ la perpendiculaire AH′. Les deux segments BH′, C′H′ seront encore égaux, l'un à l'apothème du décagone convexe inscrit au cercle de rayon AB, l'autre à l'apothème de l'hexagone inscrit au cercle de rayon AC′. Leur somme BC′ sera donc :

$$BC'=\frac{R}{4}\left[\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\sqrt{3}\,(\sqrt{5}-1)\right].$$

Il est clair qu'on opérera de même toutes les fois qu'on voudra, *connaissant les cordes de deux arcs d'une circonférence de rayon donné, trouver la corde de l'arc égal à leur somme.*

En particulier, nous trouverons pour le côté du troisième pentédécagone étoilé la valeur

$$\frac{R}{4}\left[(\sqrt{5}+1)\sqrt{3}+\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right].$$

175. On peut déduire l'apothème du pentédécagone de la connaissance du côté ; mais cela exigerait l'extraction d'une nouvelle racine carrée, au lieu qu'on peut obtenir l'apothème (sans cette extraction) par un procédé analogue à celui qui a servi à calculer le côté.

Dans la figure 167, nous mènerons le diamètre CD du point C. Le triangle rectangle BCD nous montre, comme précédemment que BD est double de l'apothème cherchée. Du point A, sur BD, abaissons la perpendiculaire AK. L'angle $\widehat{ADB}$ étant égal (comme angle inscrit) au demi-angle au centre correspondant à l'hexagone, la portion DK est égale à l'apothème de l'hexagone inscrit dans le cercle de rayon AD, par conséquent

$$DK = AD \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ou encore

$$DK = \frac{R}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}}\,\frac{\sqrt{3}}{2},$$

car AD est double de l'apothème du décagone régulier inscrit au cercle donné.

D'autre part, l'angle $\widehat{ABD}$ étant égal à $\widehat{ACD}$, c'est-à-dire au complément du demi-angle au centre correspondant au décagone régulier, l'angle KAB est égal à ce demi-angle au centre et BK est le demi-côté du décagone inscrit dans le cercle de rayon AB, soit

$$BK = AB\frac{\sqrt{5}-1}{4} = R\frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

Donc l'apothème cherchée sera

$$\frac{BD}{2} = \frac{BK+DK}{2} = \frac{R}{8}\left[\sqrt{3}\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\sqrt{5}-1\right].$$

Un raisonnement analogue donnerait :
pour l'apothème du premier pentédécagone étoilé, la valeur

$$\frac{R}{8}\left(\sqrt{3}\sqrt{10-2\sqrt{5}}+\sqrt{5}+1\right);$$

pour l'apothème du second pentédécagone étoilé, la valeur

$$\frac{R}{8}\left[\sqrt{3}\sqrt{10+2\sqrt{5}}-(\sqrt{5}-1)\right];$$

pour l'apothème du troisième pentédécagone étoilé, la valeur

$$\frac{R}{8}\left[\sqrt{3}\sqrt{10-2\sqrt{5}}-(\sqrt{5}+1)\right].$$

176. Mesure de la circonférence.

Théorème. — *Soient* P *le périmètre d'un polygone régulier circonscrit,* p *le périmètre du polygone inscrit du même nombre de côtés. Si l'on double indéfiniment le nombre des côtés,* P *et* p *tendent vers une limite commune* L.

Soit le polygone inscrit *abcd...* (*fig.* 168) et le polygone circonscrit AB CD... dont les côtés ont pour points de contact les sommets du premier. Doublons le nombre des côtés de ces polygones, en divisant en deux parties égales chacun des arcs *ab*, *bc*, *cd*,... , de manière à former le nouveau polygone régulier inscrit *aebfcg...* et le nouveau polygone régulier circonscrit correspondant EFGHKL... (*fig.* 168). Opérons sur ces nouveaux polygones comme sur les premiers, et ainsi de suite indéfiniment. Je dis que les périmètres p des polygones inscrits et les périmètres P des polygones circonscrits tendent vers une limite commune.

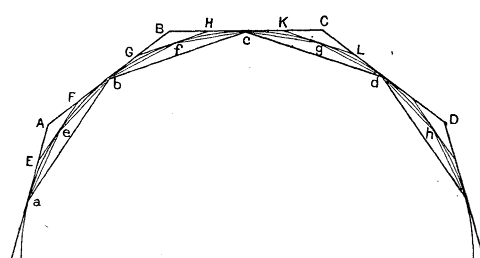


Fig. 168.

Nous le démontrerons à l'aide des remarques suivantes :

1° Les périmètres p vont en croissant; par exemple, le polygone *aebfcg...* a un périmètre plus grand que le polygone *abcd...*, car ce dernier lui est intérieur;

2° Les périmètres P vont en décroissant; par exemple, le polygone EFGHKL... a un périmètre plus petit que le polygone ABC...; il lui est, en effet, intérieur;

3° N'importe quel périmètre p est plus petit que n'importe quel périmètre P, puisque tout polygone inscrit est intérieur à tout polygone circonscrit.

La quantité p, qui va sans cesse en croissant, tout en restant constamment inférieure à une quantité fixe (à savoir une quelconque des valeurs de P), tend vers une limite. (*Leçons d'Arithmétique* de M. Tannery, chap. XII, n° 470.)

De même, la quantité P, qui va sans cesse en décroissant, tout en restant constamment supérieure à une quantité fixe (à savoir une

quelconque des valeurs de p), tend également vers une limite.

Ces deux limites sont égales. Les deux polygones inscrit et circonscrit du même nombre de côtés sont, en effet, semblables, et leurs périmètres sont dans le même rapport que leurs apothèmes. Or, l'apothème du polygone circonscrit est égale au rayon R du cercle donné, de sorte qu'on aura

$$\frac{P}{p}=\frac{R}{a},$$

a désignant l'apothème du polygone. Mais, lorsqu'on double indéfiniment le nombre des côtés, l'apothème a tend vers R. Donc la limite du rapport $\frac{P}{p}$, c'est-à-dire le rapport des deux limites précédentes (*Leçons d'Arithmétique*, chap. XII, n° 466) est égal à 1.

C. Q. F. D.

177. Je dis maintenant que *le périmètre de tout polygone convexe inscrit ou circonscrit* [1], *dont tous les côtés diminuent indéfiniment, tend vers la limite* L *obtenue au théorème précédent.*

En particulier, cette limite est indépendante du polygone régulier primitif dont on est parti.

Soient, en effet, $a'b'c'...$ (*fig.* 169) un polygone inscrit quelconque, $A'B'...$ le polygone convexe circonscrit formé par les tangentes aux points $a', b', c'...$; soient p' et P' les périmètres de ces deux polygones. La limite L du numéro précédent est comprise entre p' et P'; car p', par exemple, est plus petit que n'importe lequel des périmètres P considérés au numéro précédent, et qui ont pour limite L, de sorte qu'on a $p' \leqslant L$; et, de même, on trouverait $P' \geqslant L$.

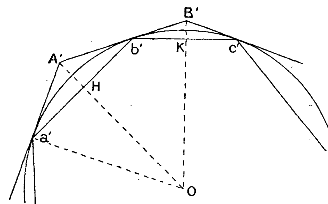


FIG. 169.

D'autre part, la droite OA' coupe $a'b'$ en son milieu H et l'on a

$$\frac{a'A'+A'b'}{a'b'}=\frac{a'A'}{a'H}=\frac{R}{OH}$$

(1) Il faut toutefois sous-entendre que le polygone circonscrit comprend la circonférence à son intérieur.

à cause des triangles rectangles $Oa'H$, $Oa'A'$, qui sont semblables comme ayant un angle aigu commun. De même

$$\frac{b'B' + B'c'}{b'c'} = \frac{R}{OK}$$

(OK désignant le milieu de $b'c'$), et ainsi de suite.

Considérons les premiers membres de ces différentes égalités, et faisons la somme des numérateurs et la somme des dénominateurs : nous obtenons ainsi [1] un rapport compris entre le plus grand et le plus petit des rapports primitifs ; il vient donc

$$\frac{P'}{p'} = f,$$

f étant compris entre la plus grande et la plus petite des quantités $\frac{R}{OH}, \frac{R}{OK}, \ldots$ Si, maintenant, le polygone varie de manière que tous les côtés diminuent indéfiniment, toutes les distances telles que OH tendent vers R, et tous les rapports $\frac{OH}{R}, \frac{OK}{R}$ vers 1. Il en est de même de $\frac{P'}{p'}$ et, par suite, aussi de $\frac{L}{p'}$ ou de $\frac{P'}{L}$, qui sont tous deux compris entre 1 et $\frac{P'}{p'}$.

Donc P' et p' tendent vers L.

C. Q. F. D.

Définition. La longueur L, limite commune des périmètres des polygones convexes inscrits et circonscrits, tels que leurs côtés diminuent tous indéfiniment (limite dont l'existence vient d'être démontrée), a reçu le nom de *longueur de la circonférence*.

178. Théorème. — *Deux circonférences quelconques sont entre elles comme leurs rayons.*

Soient les circonférences C, C_1 de rayons R, R_1. Dans ces deux circonférences, inscrivons deux polygones réguliers d'un même nombre de côtés. Ces deux polygones sont semblables et, par suite (**146**, coroll.) leurs périmètres P, P_1 sont entre eux comme les rayons R, R_1. Or, quand le nombre des côtés croît indéfiniment, le

(1) *Leçons d'Arithmétique*, chap. VI, n° 212.

rapport $\frac{P}{P_1}$ tend vers le rapport $\frac{C}{C_1}$ des deux circonférences; le théorème est donc démontré.

Corollaire. — *Le rapport de la circonférence au diamètre est un nombre constant.*

En effet, la proportion $\frac{C}{C_1} = \frac{R}{R_1}$ peut s'écrire $\frac{C}{R} = \frac{C_1}{R_1}$ ou $\frac{C}{2R} = \frac{C_1}{2R_1}$.

Le rapport de la circonférence au diamètre est donc le même pour deux circonférences quelconques.

Ce nombre constant, rapport de la circonférence au diamètre, est désigné par la lettre grecque π.

Corollaire. — *La longueur de la circonférence de rayon* R *est* $2\pi R$.

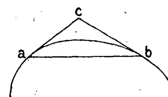
179. Longueur d'un arc de cercle.

Définition. — *La longueur d'un arc de cercle* est la limite vers laquelle tend le périmètre d'une ligne brisée convexe inscrite ou circonscrite, terminée aux extrémités de l'arc, et dont tous les côtés diminuent indéfiniment.

L'existence de cette limite se démontre par les mêmes raisonnements qui viennent d'être employés pour la circonférence entière. On considérera d'abord une ligne brisée régulière inscrite dont le nombre des côtés double indéfiniment, ainsi que la ligne brisée circonscrite correspondante. On passera ensuite au cas d'une ligne brisée quelconque [1].

Tout arc de cercle est plus long que sa corde, puisqu'il est la limite

(1) Ce mode de démonstration peut s'étendre à un arc de courbe quelconque A *convexe*, c'est-à-dire tel qu'aucun arc faisant partie du premier ne traverse sa corde. Il suffit qu'à tout nombre m inférieur à 1 (si voisin de 1 qu'il soit) on puisse faire correspondre une longueur ε telle, que pour tout arc ab faisant partie de A, dont les extrémités sont à une distance moindre que ε, le rapport de la corde ab à la somme $ac + bc$ (*fig.* ci-jointe) des tangentes à ses extrémités, limitées à leur point d'intersection, soit compris entre m et l'unité : condition qui est remplie (ainsi qu'on le démontre en calcul infinitésimal), moyennant certaines hypothèses, toujours vérifiées par les courbes que nous aurons à considérer. On est alors assuré (comme au n° **177** du texte) que le rapport du périmètre d'une ligne brisée inscrite à celui de la ligne brisée circonscrite correspondante tend vers 1, lorsque le nombre des côtés augmente indéfiniment de manière que chacun d'eux tende vers zéro.



On démontrera l'existence de la limite lorsque les lignes brisées se succèdent de manière que les sommets de chacune d'elles figurent parmi les sommets de la suivante (raisonnement du n° **176**) ; puis on passera de là au cas général, comme au n° **177**.

D'ailleurs, un arc non convexe peut, en général, se décomposer en arcs convexes.

de lignes brisées toutes plus longues que cette corde et dont les périmètres vont en croissant.

Il est, pour une raison tout analogue, *plus court que toute ligne brisée enveloppante, terminée aux mêmes extrémités* [1].

Deux arcs égaux ont des longueurs égales, puisque les lignes brisées qui servent à la définition de ces longueurs peuvent être prises égales deux à deux.

La somme de deux arcs a pour longueur la somme des longueurs de ces arcs, puisque deux lignes brisées inscrites dans chacun d'eux constituent, par leur ensemble, une ligne brisée inscrite dans l'arc total.

Il en résulte, d'après un principe déjà plusieurs fois invoqué, que le rapport des longueurs de deux arcs d'une même circonférence est égal au rapport des deux arcs, précédemment étudié au livre II, n° **70**. En particulier, les longueurs de deux arcs appartenant à une même circonférence sont entre elles comme les mesures de ces arcs en degrés.

La longueur d'une circonférence de rayon R étant $2\pi R$ et cette circonférence comprenant 360 degrés, chaque degré aura pour longueur $\frac{2\pi R}{360} = \frac{\pi R}{180}$. Une minute aura une longueur 60 fois moindre que celle du degré, soit $\frac{\pi R}{180 \times 60}$; et une seconde aura pour longueur $\frac{\pi R}{180 \times 60 \times 60}$.

Donc *un arc de m degrés, n minutes, p secondes, pris sur une circonférence de rayon* R, *aura pour longueur*

$$\frac{\pi R}{180}\left(m + \frac{n}{60} + \frac{p}{60 \times 60}\right).$$

180. On voit donc qu'on saura calculer la longueur d'un arc de cercle donné quelconque si l'on connaît le nombre π.

Calcul de π. Méthode des périmètres.

Pour calculer ce nombre ou, ce qui revient au même, pour calculer la longueur d'une circonférence de rayon donné R, nous aurons, d'après la définition, à calculer les périmètres de polygones

(1) Ces conclusions s'étendent évidemment aux longueurs des arcs de courbes quelconques, définies à l'aide des considérations développées dans la note précédente. En particulier, *la ligne droite est le plus court chemin d'un point à un autre.*

réguliers inscrits dont le nombre de côtés doublera indéfiniment. Chacun de ces périmètres fournira une valeur approchée par défaut de la longueur cherchée, cette valeur étant d'autant plus approchée que le nombre des côtés sera plus grand. Si, en même temps que le périmètre d'un polygone inscrit, on sait calculer le périmètre du polygone circonscrit correspondant, on obtiendra ainsi une valeur approchée par excès, et la différence des valeurs approchées par excès et par défaut donnera une limite supérieure de l'erreur commise en adoptant l'une d'entre elles.

Or, nous avons appris à calculer les côtés d'un certain nombre de polygones réguliers inscrits, par exemple celui du carré. Pour en déduire les côtés des polygones de 4×2, 4×2^2, ..., 4×2^n côtés, il suffira de résoudre le problème suivant :

Problème. — *Connaissant le côté c d'un polygone régulier inscrit dans un cercle de rayon donné* R, *calculer le côté du polygone régulier inscrit dans le même cercle et d'un nombre de côtés double.*

Soit $AB = c$ (*fig.* 170) le côté du premier polygone inscrit dans la circonférence de rayon $OA = R$. En divisant l'arc AB en deux parties égales par le rayon OC, perpendiculaire au milieu H de la corde AB, on obtiendra en AC le côté du polygone régulier inscrit d'un nombre de côtés double. Or on a, dans le triangle OAC,

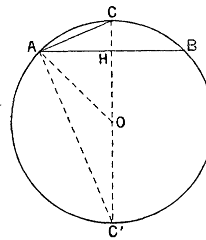


Fig. 17J.

$$\overline{AC}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OC}^2 - 2\,\overline{OC}.\,\overline{OH} = 2\,R^2 - 2\,R.\,\overline{OH} = 2\,R(R - \overline{OH})$$

et OH sera égal à $\sqrt{R^2 - \frac{c^2}{4}}$. Donc, le côté cherché c_1 sera

$$c_1 = \sqrt{2\,R\left(R - \sqrt{R^2 - \frac{c^2}{4}}\right)}.$$

D'après cela, le côté du carré étant

$$R \times \sqrt{2}, \quad \text{et son périmètre,} \quad R \times 4\sqrt{2},$$

le côté de l'octogone inscrit sera

$$R\sqrt{2 - \sqrt{2}}, \text{ et son périmètre, } R \times 8\sqrt{2 - \sqrt{2}};$$

le côté du polygone régulier inscrit de seize côtés sera

$$R\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \text{ et son périmètre, } R \times 16\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}; \text{ etc.}$$

180 *bis*. Pour avoir une valeur approchée par excès de la longueur de la circonférence, il suffit de calculer le périmètre d'un polygone régulier circonscrit et, par conséquent, de résoudre le problème suivant :

Problème. — *Connaissant le côté* c *d'un polygone régulier inscrit dans un cercle de rayon donné* R, *calculer le côté du polygone régulier du même nombre de côtés, circonscrit au même cercle.*

On trouve immédiatement le côté cherché c' en remarquant que les deux polygones sont semblables et que, par conséquent, leurs côtés sont entre eux comme leurs apothèmes. L'apothème du polygone circonscrit étant R, et celle du polygone inscrit $\sqrt{R^2 - \frac{c^2}{4}}$, le côté cherché est donné par la proportion

$$\frac{c'}{c} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - \frac{c^2}{4}}}.$$

Nous venons d'apprendre à calculer le côté c pour des polygones réguliers inscrits à nombres de côtés de plus en plus grands : la proportion précédente fera connaître les côtés des polygones circonscrits correspondants.

181. On peut également, connaissant le côté c d'un polygone régulier inscrit à un cercle de rayon R, obtenir à la fois le côté c_1 et l'apothème a_1 du polygone régulier d'un nombre de côtés double, inscrit au même cercle (ce qui donne le côté du polygone circonscrit correspondant sans nouvelle racine carrée), par la méthode suivante.

Dans la figure 170, soit C′ le point où le rayon OC prolongé coupe la circonférence. Le triangle ACC′ est rectangle et donne (**123**, *remarque*)

$$AC \cdot AC' = CC' \cdot AH = 2R \times \frac{c}{2} = Rc.$$

et d'autre part,

$$\overline{AC}^2 + \overline{AC'}^2 = \overline{CC'}^2 = 4R^2.$$

Multiplions la première égalité par par 2 et ajoutons à la seconde : il vient

$$\overline{AC}^2 + \overline{AC'}^2 + 2\,AC \cdot AC' = (AC + AC')^2 = 4R^2 + 2Rc.$$

$$\text{Donc, } AC + AC' = \sqrt{4R^2 + 2Rc} = 2\sqrt{R\left(R + \frac{c}{2}\right)}.$$

Si, après avoir multiplié la première égalité par 2, nous la retranchons de la seconde, nous obtenons

$$\overline{AC}^2 + \overline{AC'}^2 - 2\,AC \cdot AC' = (AC' - AC)^2 = 4R^2 - 2Rc.$$

$$\text{Donc } AC' - AC = \sqrt{4R^2 - 2Rc} = 2\sqrt{R\left(R - \frac{c}{2}\right)}.$$

En ajoutant et retranchant membre à membre, ces deux égalités donnent

$$AC = \sqrt{R\left(R + \frac{c}{2}\right)} - \sqrt{R\left(R - \frac{c}{2}\right)};\quad AC' = \sqrt{R\left(R + \frac{c}{2}\right)} + \sqrt{R\left(R - \frac{c}{2}\right)},$$

ce qui résout la question, puisque AC est égal au côté cherché c_1 et AC', double de l'apothème a_1.

On voit que nous avons appris à *calculer les cordes des moitiés des deux arcs qu'intercepte une corde donnée sur une circonférence de rayon donné.*

182. Méthode des isopérimètres. — On peut présenter la méthode précédente sous une forme un peu différente.

Le problème consiste, en effet, à calculer le rapport du périmètre p d'un polygone régulier au rayon r du cercle circonscrit et à l'apothème a ou rayon du cercle inscrit, et cela, pour des polygones dont les nombres de côtés augmentent indéfiniment. Mais il est tout à fait indifférent que les polygones que l'on considère successivement soient ou non inscrits au même cercle, puisque les rapports $\frac{p}{r}$ et $\frac{p}{a}$ ne dépendent que du nombre des côtés du polygone (**163**).

Dans la *méthode des isopérimètres*, on considère des polygones réguliers dont le nombre de côtés double indéfiniment et qui ont même périmètre. On a donc à résoudre le problème suivant :

Problème. — *Connaissant le rayon r et l'apothème a d'un polygone régulier, calculer le rayon r' et l'apothème a' du polygone régulier d'un nombre de côtés double, isopérimètre au premier.*

Soit AB (*fig.* 171) le côté du polygone régulier de n côtés inscrit au cercle de rayon $OA = r$. Abaissons sur AB la perpendiculaire $OH = a$, et prolongeons-la jusqu'à rencontre avec la circonférence au point C, milieu de l'arc AB. Joignons AC et BC et soient A', B' les milieux de ces deux droites, la droite A'B' coupant OC au point H'.

A'B' est le côté d'un polygone régulier de 2n côtés inscrit au cercle de rayon OA'.

En effet, puisque l'angle $\widehat{AOB}$ intercepte sur la circonférence de rayon OA un arc égal à la $n^{\text{ème}}$ partie de la circonférence, l'angle $\widehat{A'OB'}$, qui en est la moitié (puisque $\widehat{A'OC}$ est la moitié de $\widehat{AOC}$ et $\widehat{B'OC}$ la moitié de $\widehat{BOC}$), interceptera sur la circonférence de rayon OA' un arc égal à la $2n^{\text{ème}}$ partie de cette circonférence.

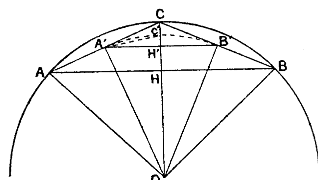


Fig. 171.

Ce polygone est isopérimètre au premier.

Car le côté A'B' de ce polygone, joignant les milieux de AC et de BC, est moitié du côté primitif AB, alors que le nombre des côtés est double.

Les longueurs cherchées r' et a' sont donc OA' et OH'.

Or H' est le milieu de CH, de sorte qu'on a

$$OH' - OH = OC - OH'.$$

Ceci s'écrit

$$2\,OH' = OC + OH \qquad \text{ou} \qquad OH' = \frac{OC + OH}{2}.$$

Autrement dit, OH' est moyenne arithmétique entre OC et OH.

D'autre part, le triangle rectangle OA'C donne

$$OA' = \sqrt{OC \times OH'}.$$

Autrement dit, OA' est moyenne géométrique entre OC et OH'.

Donc on calculera a' par la formule

$$a' = \frac{r + a}{2},$$

puis r' par la formule

$$r' = \sqrt{r a'}.$$

En répétant cette double opération, on obtient des valeurs de r et de a pour des polygones de nombres de côtés de plus en plus grands. Les rapports de ces quantités au demi-périmètre commun des polygones donneront des valeurs approchées de $\frac{1}{\pi}$, les unes par défaut, les autres par excès et de plus en plus approchées.

Supposons, pour simplifier, le périmètre commun des polygones égal au double de l'unité de longueur et prenons, pour le premier d'entre eux, le carré. L'apothème de ce polygone sera la moitié du côté, c'est-à-dire $\frac{1}{4}$ et le rayon, égal au côté divisé par $\sqrt{2}$, c'est-à-dire à $\frac{1}{2\sqrt{2}}$. En faisant $a = \frac{1}{4}$, $r = \frac{1}{2\sqrt{2}}$, les formules précédentes donneront des valeurs a' et r' correspondant à l'octogone ; et ainsi de suite.

Mais si l'on prenait(1) $a = 0$, $r = \frac{1}{2}$, nos formules donneraient précisément $a' = \frac{1}{4}$, $r' = \frac{1}{2\sqrt{2}}$. Nous arrivons donc à la proposition suivante (théorème de *Schwab*) :

Théorème. — *En formant une suite de nombres dont les deux premiers soient* 0 *et* $\frac{1}{2}$, *et dont chaque terme soit alternativement moyenne arithmétique et moyenne géométrique entre les deux précédents, les nombres ainsi écrits tendront vers* $\frac{1}{\pi}$.

183. Les nombres a et r, termes consécutifs de la suite précédente, étant approchés, l'un par défaut, l'autre par excès, l'erreur commise en adoptant l'un d'eux pour valeur approchée de $\frac{1}{\pi}$ sera inférieure à $r - a$.

Or on a

$$r' - a' < \frac{r - a}{4}.$$

Pour le démontrer, reprenons la figure 171 et portons sur OC une longueur $OC' = OA' = r'$. Le segment $C'H'$ représentera $r' - a'$. Or les deux angles $\widehat{C'A'H'}$, $\widehat{C'A'C}$ sont égaux ; car ils ont respectivement pour mesures, dans la circonférence OA', les moitiés des arcs égaux $C'B'$, $A'C'$ (l'un comme angle inscrit, l'autre comme angle formé par

(1) Ces nombres correspondent à la division de la circonférence en deux parties égales. Les points de division étant A et B, le diamètre AB peut être considéré comme le côté d'un polygone régulier de deux côtés, dont le périmètre sera 2AB. Ce périmètre étant représenté par 2, le rayon r devra être représenté par $\frac{1}{2}$ et l'apothème a (distance du côté au centre) par 0.

une tangente et une sécante). Le théorème de la bissectrice (**115**) montre alors que les segments H′C′, C′C sont entre eux comme H′A′, A′C. Donc H′C′ est plus petit que la moitié de H′C, égale au quart de CH ou à $\frac{r-a}{4}$.

Or les deux premiers termes de la suite de Schwab donnent $r - a = \frac{1}{2}$. Donc l'erreur commise en prenant, pour valeur approchée de $\frac{1}{\pi}$, le terme qui occupe le rang $2n$ dans cette suite, est inférieure à

$$\frac{1}{2 \times 4^n} = \frac{1}{2^{2n+1}}.$$

184. Le géomètre grec *Archimède*, qui, le premier, a défini et évalué la longueur de la circonférence, trouvait, par la méthode des périmètres, la valeur, approchée par excès à moins de un centième près,

$$\pi = \frac{22}{7}.$$

On ne peut, d'ailleurs, obtenir que des valeurs *approchées* de π et jamais la valeur *exacte;* car on démontre que ce nombre est *incommensurable*, c'est-à-dire qu'il n'est égal à aucun nombre entier ni à aucun nombre fractionnaire.

Les premières décimales de la valeur de π sont[1]

$$\pi = 3{,}141592653\ldots$$

et celles de $\frac{1}{\pi}$

$$\frac{1}{\pi} = 0{,}3183098\ldots$$

On utilise souvent, pour π, la valeur

$$3{,}1416,$$

approchée par excès.

(1) Cette valeur de π n'a pas été obtenue par les méthodes que nous venons d'exposer, mais par d'autres, incomparablement plus rapides, empruntées au calcul infinitésimal. On retient aisément ces décimales à l'aide du vers suivant :

Que j'aime à faire apprendre un nombre utile aux sages,
3 1 4 1 5 9 2 6 5 3 5

dans lequel les nombres de lettres des différents mots donnent les chiffres successifs de π.

La valeur $\frac{355}{113}$, approchée à un millionième près par excès, a été donnée par *Adrien Métius*.

Le problème célèbre de la *quadrature du cercle* revient (ainsi que nous le verrons plus loin) à construire une droite égale à la longueur d'une circonférence dont le rayon est donné. Il est impossible de résoudre ce problème en ne se servant que de la règle et du compas. Cette impossibilité, qui ne découlerait pas nécessairement (1) de l'incommensurabilité de π, a été également démontrée (2).

EXERCICES

POLYGONES RÉGULIERS

178. Paver un plan avec des polygones réguliers égaux entre eux. Montrer que le problème n'est possible qu'avec trois sortes de polygones réguliers.

179. Construire un pentagone régulier, connaissant son côté.

180. Dans un pentagone régulier, deux diagonales qui n'aboutissent pas au même sommet se divisent mutuellement en moyenne et extrême raison.

181. Le triangle rectangle qui a pour côtés de l'angle droit les côtés des deux décagones réguliers inscrits à un cercle, a pour hypoténuse le côté du triangle équilatéral inscrit à ce même cercle.

182. Même proposition pour le décagone convexe, l'hexagone et le pentagone convexe; — pour le décagone étoilé, l'hexagone et le pentagone étoilé.

183. Si, sur les côtés d'un hexagone régulier et extérieurement à l'hexagone, on construit 6 carrés, les 12 sommets extérieurs de ces carrés sont ceux d'un dodécagone régulier.

184. Vérifier que les deux expressions obtenues, au n° **180** et au n° **181**, pour le côté $AC = c_1$, sont bien égales entre elles.

LONGUEUR DE LA CIRCONFÉRENCE

185. Trouver le rayon de la circonférence sur laquelle l'arc de 18° 15′ a une longueur de 2 mètres.

186. Sur le rayon OA d'une circonférence comme diamètre, on décrit une seconde circonférence. Soient B et C les points où les deux circonférences sont coupées par un même rayon issu du centre O de la première. Montrer que les arcs AB, AC ont même longueur.

187. Si deux circonférences sont tangentes intérieurement à une même troisième et que la somme de leurs rayons soit égale au rayon de cette troisième, l'arc de celle-ci, compris entre les points de contact, est égal à la somme des arcs des circon-

(1) Par exemple, la diagonale d'un carré est incommensurable avec son côté, quoiqu'on puisse aisément construire l'un, connaissant l'autre.

(2) Le théorème de l'incommensurabilité de π est dû à Lambert (1770). Quant à l'impossibilité de la quadrature du cercle, c'est M. Lindemann, qui l'a démontrée, en 1882, par la généralisation de théorèmes dus à un géomètre français, M. Hermite.

férences intérieures compris entre leur point de rencontre le plus rapproché de la grande circonférence et ces mêmes points de contact.

188. La somme des côtés du carré et du triangle équilatéral inscrits donne une valeur approchée de la demi-circonférence. (Limite de l'erreur: un centième du rayon.)

189. Le périmètre du triangle rectangle qui a pour còtés de l'angle droit les $\frac{3}{5}$ et les $\frac{6}{5}$ du diamètre donne une valeur approchée de la circonférence. (Limite de l'erreur : un dix millième du rayon.)

PROBLÈMES

PROPOSÉS SUR LE TROISIÈME LIVRE.

190. Étant données deux circonférences concentriques, mener une droite sur laquelle ces circonférences interceptent deux cordes dont l'une soit double de l'autre.

191. Sur les côtés AB, AC d'un triangle, on prend, en sens inverse, deux longueurs égales BD = CE. La droite DE est divisée par BC dans le rapport inverse des côtés AB, AC.

192. Soient AA′ les points de contact d'une tangente commune à deux circonférences données; M,M′ deux points d'intersection de ces circonférences respectivement avec une parallèle quelconque à AA′. Lieu du point d'intersection de AM, A′M′.

193. Les côtés d'un polygone restent respectivement parallèles à des directions fixes, pendant que tous les sommets, sauf un, glissent sur des droites données. Quel est le lieu du dernier sommet ? (Ex. 124.)

194. Inscrire, dans un polygone donné, un polygone dont les côtés soient parallèles à des droites données. — Le problème peut-il être indéterminé ?

195. On divise les hauteurs d'un triangle dans des rapports donnés et, par chaque point de division, ou mène une parallèle au côté correspondant. Trouver le rapport de similitude du triangle ainsi formé et du triangle primitif.

196. Soient a, b, c les symétriques d'un même point quelconque O du plan, par rapport aux milieux des côtés BC, CA, AB d'un triangle. Les droites Aa, Bb, Cc concourent en un même point P. Lorsque le point O varie en décrivant une figure quelconque, le point P décrit une figure homothétique de la première.

197. Par les trois sommets d'un triangle, on mène trois droites concourantes en un même point O; puis on prend la symétrique de chacune d'elles, par rapport à la bissectrice de l'angle du triangle qui a, pour sommet, le sommet dont elle est issue. Montrer que ces trois nouvelles droites sont également concourantes en un certain point O′.

Montrer que cet énoncé subsiste lorsque les droites primitives, au lieu d'être concourantes, sont parallèles et que, dans ce cas, le point O′ est sur le cercle circonscrit au triangle.

Déduire également, du même énoncé, que les trois hauteurs d'un triangle se coupent en un même point.

198. ABCD est un losange circonscrit à un cercle : démontrer qu'une tangente mobile MN intercepte, sur les côtés adjacents AB, CB, deux segments AM, CN dont le produit est constant.

199. Si, par un point A pris dans le plan d'un cercle, on mène à ce cercle une sécante variable AMM′, les droites qui joignent M, M′ à l'une des extrémités du diamètre qui passe par A interceptent, sur la perpendiculaire en A à ce diamètre, deux segments dont le produit est constant.

200. Une tangente commune intérieure à deux circonférences divise une tangente commune extérieure (et celle-ci divise extérieurement la première) en deux segments dont le produit est égal au produit des rayons.

Le segment intercepté, par les tangentes communes intérieures, sur une tangente commune extérieure, a même milieu que cette tangente commune extérieure et même longueur qu'une tangente commune intérieure.

201. Un triangle rectangle a pour sommet de l'angle droit un point fixe A, pendant que les deux autres sommets B, C restent constamment sur une circonférence fixe O. Trouver : 1° le lieu du milieu de BC ; 2° le lieu de la projection du point A sur BC.

202. Construire un triangle connaissant un côté, la hauteur correspondante et le produit des deux autres côtés.

203. Construire un triangle, connaissant deux médianes et une hauteur (deux cas).

204. Inscrire dans un cercle donné un triangle isoscèle, connaissant la somme ou la différence de la base et de la hauteur.

205. Calculer les diagonales d'un trapèze, connaissant les quatre côtés.

206. Étant donnés une circonférence et deux points A, B, tracer une corde parallèle à AB telle, que les droites joignant respectivement ses extrémités aux points A, B se coupent sur la circonférence.

207. Par les extrémités A, B d'un diamètre d'un cercle, on mène deux cordes AC, BD se coupant en P à l'intérieur du cercle. Démontrer qu'on a :

$$\overline{AB}^2 = AC.\,AP + BD.\,BP.$$

208. Par deux points fixes A, B, on mène une circonférence variable et, par un point fixe C en ligne droite avec A, B, les tangentes à cette circonférence. Lieu du milieu de la droite qui joint les points de contact.

209. Tracer avec trois points donnés comme centres, trois cercles orthogonaux deux à deux.

210. Étant donnés une circonférence, deux points A, B sur cette courbe et une droite quelconque, trouver sur la circonférence un point M tel, que les droites MA, MB interceptent, sur la droite donnée, un segment divisé dans un rapport donné par un point donné de cette droite.

211. Sur les côtés AB, AC, BC d'un triangle comme bases, on construit trois triangles isoscèles semblables ABP, ACQ, BCR ; les deux premiers extérieurement au triangle donné, le troisième au contraire du même côté de BC que ce triangle (ou l'inverse). Montrer que APQR est un parallélogramme.

212. Une figure varie en restant semblable à elle-même, de manière que trois droites non concourantes appartenant à cette figure passent chacune par un point

fixe. Démontrer : 1° que toute autre droite de la figure passe également par un point fixe ; 2° que tout point de la figure décrit une circonférence.

213. Construire un quadrilatère semblable à un quadrilatère donné et dont les côtés passent par quatre points donnés.

Le problème peut-il être indéterminé? Trouver, dans ce cas, le lieu des points d'intersection des diagonales des différents quadrilatères répondant à la question.

214. Une figure varie en restant constamment semblable à elle-même, de manière que trois points de cette figure décrivent chacun une droite. Montrer qu'un certain point de la figure reste fixe. En déduire que tout autre point décrit une droite.

215. Étant données deux figures semblables et de même sens, trouver le lieu des points tels que, si on les considère comme appartenant à la première figure, la droite qui les joint à leurs homologues de la seconde passe par un point donné.

216. Mener, par un point donné O, une sécante OMN qui intercepte sur deux droites données, à partir de deux points donnés A, B de ces droites, deux segments AM, BN de rapport donné.

COMPLÉMENTS DU LIVRE III

CHAPITRE PREMIER

SIGNES DES SEGMENTS

185. Nous avons, jusqu'ici, mesuré les segments de droites par des nombres essentiellement positifs. Il est avantageux, lorsque l'on a à comparer des segments situés sur une même droite, de leur faire, au contraire, correspondre des nombres tantôt positifs, tantôt négatifs, d'après une convention que nous allons faire connaître [1].

Sur la droite considérée X'X (*fig.* 172), nous choisirons, une fois

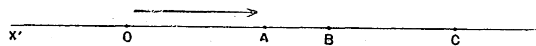


Fig. 172.

pour toutes, un certain sens, dit *sens positif*, par exemple le sens X'X, marqué par la flèche sur la figure 172. *A un segment quelconque* AB, *nous ferons correspondre le nombre qui mesure sa longueur, précédé du signe + si ce segment est dirigé dans le sens positif, du signe — s'il est dirigé dans le sens opposé.*

Il est à remarquer que le signe d'un segment dépend essentiellement de l'ordre dans lequel on énonce ses deux extrémités : on a

$$\overline{AB} = -\overline{BA}.$$

186. La convention précédente permet d'écrire certaines relations sous une forme indépendante de la disposition des points que l'on considère.

Par exemple, A, B, C étant trois points en ligne droite, BC est égal

(1) Nous rappelons sommairement, dans les nos **185-187**, la convention relative aux signes des segments. Cette convention est étudiée et justifiée d'une façon plus complète dans les *Leçons d'Algèbre élémentaire* de M. Bourlet (librairie Armand Colin, 1896; Introduction et chapitres I et II). Le lecteur y trouvera, en particulier, la démonstration de certains principes que nous avons admis, tels que : *La somme algébrique de plusieurs segments est indépendante de leur ordre; — cette somme ne change pas lorsqu'on remplace un ou plusieurs d'entre eux par leur somme algébrique effectuée*, etc.; ainsi que les conventions moyennant lesquelles les nombres algébriques peuvent être traités, au point de vue du calcul, comme les nombres ordinaires.

à la somme ou à la différence de AB et de AC, suivant l'ordre dans lequel se suivent les trois points. Lorsqu'on évalue les segments en grandeur et en signe, ces différentes relations sont remplacées par la relation unique

$$\text{(1)} \qquad AB + BC + CA = 0$$

qui a lieu, quelle que soit la disposition des points.

En effet, si, en suivant la droite ABC dans le sens positif, on rencontre ces points dans l'ordre A,B,C (comme dans la figure 172), les segments AB, AC, BC sont positifs et on a [1] $AC = AB + BC$, ce qui équivaut à la relation (1).

Or, cette relation ne change pas si l'on permute entre eux deux des points; par exemple, en échangeant B et C, on a l'égalité

$$AC + CB + BA = 0$$

qui est équivalente à la précédente, laquelle est par conséquent vraie si l'ordre des points est A, C, B.

D'ailleurs, on sait [2] que, par une suite de permutations successives, on peut changer l'ordre d'une façon quelconque. Donc la relation (1) est toujours vraie.

Cette relation se généralise immédiatement à un nombre quelconque de points en ligne droite. Par exemple, cinq points A, B, C, D, E d'une même droite X'X donnent bien l'égalité

$$AB + BC + CD + DE + EA = 0.$$

Pour le démontrer, observer que la relation en question est démontrée pour le cas de trois points. Il suffit donc d'établir que si cette relation est vraie pour un certain nombre de points, elle est vraie pour le nombre immédiatement supérieur. Nous pouvons donc la supposer établie pour le cas de quatre points et écrire

$$AB + BC + CD + DA = 0.$$

D'autre part, les trois points A, D, E donnent

$$AD + DE + EA = 0.$$

(1) Le segment AC est dit la *résultante* des segments AB, BC (cf. Bourlet, *Leçons d'Algèbre*, introduction).

(2) Tannery, *Leçons d'Arithmétique*, ch. II, n° 77.

En ajoutant, les deux termes $DA + AD$ se détruisent et il vient l'égalité annoncée [1].

187. Prenons sur la droite X'X un certain point fixe O (*fig.* 172). Nous déterminerons alors un point quelconque A par le segment OA, compté en grandeur et signe. Ce segment se nomme l'*abscisse* du point A, rapportée à l'*origine* O. Il est évident que la connaissance de l'abscisse en grandeur et signe détermine, sans aucune ambiguïté (1), la position du point A.

Deux points A et B étant donnés par leurs abscisses, rapportées à la même origine O, la distance AB est donnée par

$$AB = OB - OA,$$

équation équivalente à l'équation (1) du numéro précédent.

188. Un point C étant pris sur la droite AB, le rapport $\frac{CA}{CB}$ est négatif si le point C est entre A et B, et positif si C est extérieur au segment AB [2].

D'après cela, il n'y a qu'un point qui divise un segment donné dans un rapport donné en grandeur et en signe. Si les points C et D sont conjugués harmoniques par rapport à un segment AB, les rapports $\frac{CA}{CB}$ et $\frac{DA}{DB}$ sont égaux et de signes contraires.

189. Soit O le milieu du segment CD (*fig.* 173), dont les extrémités sont conjuguées harmoniques par rapport au segment AB. On a

$$\overline{OC}^2 = OA.OB.$$

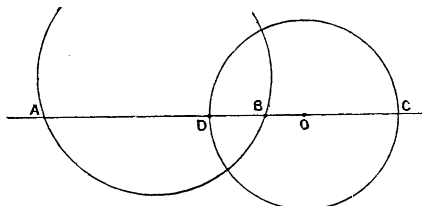


FIG. 173.

En effet, déterminons les points A, B, C, D par leurs abscisses rapportées à l'origine O. L'égalité $\frac{CA}{CB} = -\frac{DA}{DB}$ devient

$$-\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB} = \frac{OC - OA}{OB - OC} = \frac{OA - OD}{OB - OD}.$$

(1) Cf. Bourlet, *Leçons d'Algèbre*, ch. II, n° 23.
(2) Cf. Bourlet, *Leçons d'Algèbre*, ch. I, n° 16.

Nous aurons un rapport égal aux précédents en faisant la somme des deux derniers numérateurs et la somme des deux derniers dénominateurs, et un autre en formant les différences de ces mêmes termes. En remarquant que OD = — OC, nous obtenons ainsi

$$-\frac{CA}{CB}=\frac{DA}{DB}=\frac{2OC}{2OB}=\frac{2OA}{2OC}.$$

On a donc bien le théorème suivant :

Théorème. — *La moitié d'un segment de droite est moyenne proportionnelle entre les distances du milieu de ce segment à deux points qui le divisent harmoniquement.*

Nous voyons, de plus, que la valeur commune des rapports $\frac{OC}{OB}$ et $\frac{OA}{OC}$ est égale à la valeur commune des rapports $-\frac{CA}{CB}$ et $\frac{DA}{DB}$.

Réciproque. — *Si, à partir du milieu* O *d'un segment* OD, *on porte, dans le même sens, deux longueurs* OA, OB *ayant pour moyenne proportionnelle la moitié du segment, les points* A *et* B *divisent harmoniquement le segment donné* CD.

Car les rapports égaux $\frac{OC}{OB}=\frac{OA}{OC}$ donnent lieu, par addition et soustraction des numérateurs et des dénominateurs, les rapports égaux aux premiers

$$\frac{OA-OC}{OC-OB}=\frac{OA+OC}{OB+OC}$$

ou, en tenant compte de l'égalité OD = — OC,

$$-\frac{CA}{CB}=\frac{DA}{DB}.$$

Corollaires. — *Si deux segments sont conjugués harmoniques, le cercle décrit sur le premier comme diamètre coupe à angle droit tout cercle passant par les extrémités du second* (*fig.* 173).

Car le carré du rayon du premier cercle est égal à la puissance de son centre par rapport au second cercle.

Réciproquement, *quand deux cercles se coupent à angle droit, tout diamètre de l'un est divisé harmoniquement par l'autre.*

190. Lorsque deux droites seront parallèles, nous adopterons, en général, le même sens positif sur toutes deux.

Moyennant cette convention, nous pouvons dire que *le rapport des segments* BC, DE, *interceptés par un même angle sur deux sécantes parallèles, est égal, en grandeur et en signe, au rapport des segments* AB, AD, *que ces parallèles interceptent sur l'un des côtés de l'angle* (*fig*. 115, 116, 117, n° **117**).

Cette égalité a été démontrée, en ce qui regarde les valeurs absolues, au n° **117**. D'aillleurs les deux rapports ont le même signe : les segments BC, DE sont de même sens (*fig*. 115, 116) ou de sens contraires (*fig*. 117) en même temps que les segments AB, AD.

Soient, en particulier, deux figures homothétiques : il y a évidemment lieu de considérer le rapport de similitude comme positif ou comme négatif, suivant que l'homothétie est directe ou inverse. Dès lors, *le rapport de similitude est égal, en grandeur et en signe, au rapport de deux lignes homologues quelconques*.

191. La convention de signe faite au n° **133**, relativement à la puissance d'un point par rapport à un cercle, n'est qu'un cas particulier de celle que nous venons d'indiquer.

En effet, sur la sécante ABB′ (*fig*. 128 et 129, n° **131**) menée du point A à la circonférence O, choisissons un sens positif quelconque. Les segments AB, AB′ sont de même sens ou de sens contraires suivant que le point A est extérieur ou intérieur au cercle : leur produit est donc positif dans le premier cas, négatif dans le second [1].

EXERCICES

217. Quand quatre points A, B ; C, D forment une division harmonique, on a (en grandeur et signe) $\frac{2}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}$.

218. Comment peut-on modifier l'énoncé du théorème de Stewart (n° **127**), pour qu'il devienne indépendant de l'ordre des points B, C, D (notation du n° **127**) sur la droite qui les contient ?

Démontrer directement l'énoncé ainsi modifié lorsque le point A est sur la droite BCD. En déduire l'énoncé général.

219. Démontrer directement les corollaires du n° **189**. En déduire les théorèmes du même numéro.

220. Si, dans le théorème du n° **116**, on fait varier le rapport donné, les points A

(1) Cf. Bourlet, *Leçons d'Algèbre*, ch. I, n° 14.

et B (notation du nº **116**) restant fixes, les différents cercles ainsi trouvés ont même axe radical. Leurs points limites sont les points A et B.

En déduire la solution du problème suivant : trouver, sur une droite ou sur un cercle donné, la position que doit occuper un point M pour que le rapport de ses distances à deux points donnés soit le plus grand ou le plus petit possible. (Construction tout analogue aux constructions du nº **159**.)

221. Trouver un segment qui divise harmoniquement deux segments donnés. Le problème est-il toujours possible ?

222. La circonférence qui a pour points diamétralement opposés les centres de similitude de deux cercles a, avec ces deux cercles, même axe radical (nº **138**).

CHAPITRE II

TRANSVERSALES

192. Théorème. — *Si les côtés* BC, CA, AB *d'un triangle* ABC (*fig.* 174) *sont rencontrés par une même droite en* a, b, c, *on a, entre les segments ainsi déterminés sur ces côtés, la relation*

$$(2) \qquad \frac{aB}{aC}\cdot\frac{bC}{bA}\cdot\frac{cA}{cB} = 1.$$

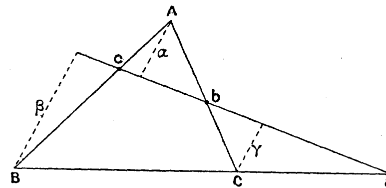


Fig. 174.

Pour le démontrer, menons, par les trois sommets du triangle, jusqu'à rencontre avec la transversale, trois droites parallèles à une même direction quelconque, sur lesquelles nous adopterons le même sens positif. Soient α, β, γ les distances des sommets à la transversale, comptées sur les parallèles en question : on aura

$$\frac{aB}{aC} = \frac{\beta}{\gamma},$$

$$\frac{bC}{bA} = \frac{\gamma}{\alpha}$$

$$\frac{cA}{cB} = \frac{\alpha}{\beta},$$

d'où, en multipliant $\quad \dfrac{aB}{aC}\cdot\dfrac{bC}{bA}\cdot\dfrac{cA}{cB} = \dfrac{\beta\gamma\alpha}{\gamma\alpha\beta} = 1.$ c. q. f. d. (1).

(1) Si la transversale était parallèle au côté BC, le point a devrait être considéré comme rejeté à l'infini et le rapport $\frac{aB}{aC}$ comme égal à 1. La relation de l'énoncé se réduirait alors à $\frac{bA}{bC} = \frac{cA}{cB}$, c'est-à-dire au théorème du n° **114**. Si deux côtés AB, AC du triangle devenaient parallèles, A étant à l'infini, on écrirait l'expression $\frac{aB}{aC}\cdot\frac{bC}{bA}\cdot\frac{cA}{cB}$ sous la forme $\frac{aB}{aC}\cdot\frac{bC}{cB}\cdot\frac{cA}{bA}$ et l'on remplacerait $\frac{cA}{bA}$ par 1 : on aurait alors l'énoncé du n° **117**.

193. Réciproque. (Théorème de *Ménélaüs.*) — *Si, sur les côtés* BC, CA, AB *d'un triangle* ABC, *on prend trois points a, b, c vérifiant la relation*

$$(2) \qquad \frac{aB}{aC} \cdot \frac{bC}{bA} \cdot \frac{cA}{cB} = 1.$$

ces trois points sont en ligne droite.

Car la droite ab coupe le côté AB en un point c' tel que

$$\frac{aB}{aC} \cdot \frac{bC}{bA} \cdot \frac{c'A}{c'B} = 1.$$

Cette égalité, comparée avec la précédente, montre que

$$\frac{cA}{cB} = \frac{c'A}{c'B}$$

et, par suite, que les points c et c' coïncident.

C. Q. F. D.

Remarque. — Ce théorème revient, au fond, à celui que nous avons démontré au n° **144**. On peut, en effet, trouver trois longueurs α, β, γ (comptées en grandeur et signe) telles que l'on ait :

$$\frac{aB}{aC} = \frac{\beta}{\gamma}, \qquad \frac{bC}{bA} = \frac{\gamma}{\alpha},$$

d'où résulte, en vertu de la relation (2),

$$\frac{cA}{cB} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

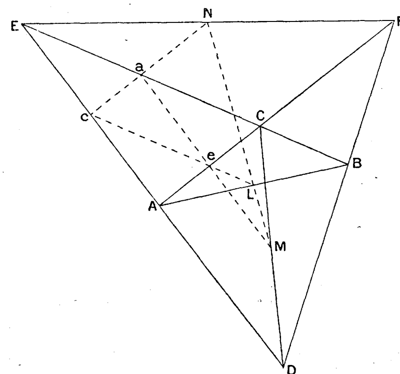


Fig. 175.

Dès lors, trois figures homothétiques deux à deux, dans lesquelles A, B, C seront trois points homologues et α, β, γ trois segments homologues, auront a, b, c pour centres de similitude.

194. Ce théorème sert à démontrer que trois points sont en ligne droite.

Exemple I. — *Les milieux des trois diagonales d'un quadrilatère complet sont en ligne droite.*

Soit le quadrilatère complet ABCDEF (*fig.* 175) dont les diagonales

AB, CD, EF ont pour milieux L, M, N. Considérons le triangle ACE, formé par trois des côtés du quadrilatère et soient a, c, e les milieux de CE, EA, AC. La droite ce est parallèle à CE et passe par le point L; la droite ea est parallèle à EA et passe par le point M; la droite ac est parallèle à AC et passe par le point N. Pour démontrer que L, M, N sont en ligne droite, il nous suffira de prouver la relation

$$\frac{\mathrm{L}c}{\mathrm{L}e}\cdot\frac{\mathrm{M}e}{\mathrm{M}a}\cdot\frac{\mathrm{N}a}{\mathrm{N}c}=1.$$

Or les parallèles Lec, BCE donnent

$$\frac{\mathrm{L}c}{\mathrm{L}e}=\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{BC}}$$

et on aurait de même

$$\frac{\mathrm{M}e}{\mathrm{M}a}=\frac{\mathrm{DA}}{\mathrm{DE}}$$

$$\frac{\mathrm{N}a}{\mathrm{N}c}=\frac{\mathrm{FC}}{\mathrm{FA}}.$$

Or le produit des trois seconds membres

$$\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{BC}}\cdot\frac{\mathrm{DA}}{\mathrm{DE}}\cdot\frac{\mathrm{FC}}{\mathrm{FA}}$$

est bien égal à 1, puisque les points B, D, F, pris sur les côtés du triangle ACE, sont en ligne droite.

195. Exemple II. — *Si les sommets de deux triangles abc, $a'b'c'$ se correspondent de manière que les droites aa', bb', cc', qui joignent les sommets correspondants, se coupent en un même point o : les points de rencontre des côtés correspondants sont en ligne droite.*

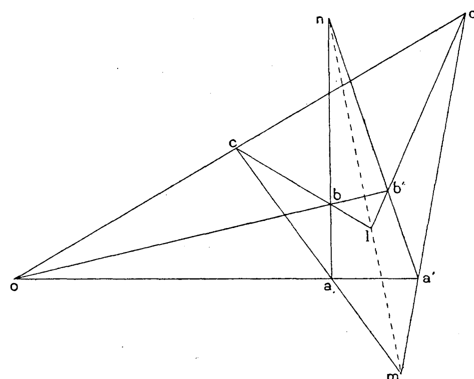


Fig. 176.

Soient l (*fig.* 176) le point de rencontre de bc, $b'c'$; m, le point de rencontre de ca, $c'a'$; n, le point de rencontre de ab, $a'b'$. Il s'agit de prouver que l, m, n sont en ligne droite, autrement dit que l'on a

$$\frac{lb}{lc}\cdot\frac{mc}{ma}\cdot\frac{na}{nb}=1.$$

Or, le triangle abc, coupé par la transversale $lb'c'$, donne

$$\frac{lb}{lc}\cdot\frac{c'c}{c'o}\cdot\frac{b'o}{b'b}=1.$$

De même, les triangles oca, oab, coupés respectivement par les transversales $mc'a'$, $na'b'$ donnent

$$\frac{mc}{ma}\cdot\frac{a'a}{a'o}\cdot\frac{c'o}{c'c}=1.$$

$$\frac{na}{nb}\cdot\frac{b'b}{b'o}\cdot\frac{a'o}{a'a}=1.$$

En multipliant membre à membre, les facteurs $a'a$, $b'b$, $c'c$, $a'o$, $b'o$, $c'o$ disparaissent, et l'on obtient la relation demandée.

Deux triangles tels, que les droites qui joignent les sommets correspondants concourent en un même point, sont dits *homologiques*.

196. Exemple III (Théorème de *Pascal*). — *Dans tout hexagone*

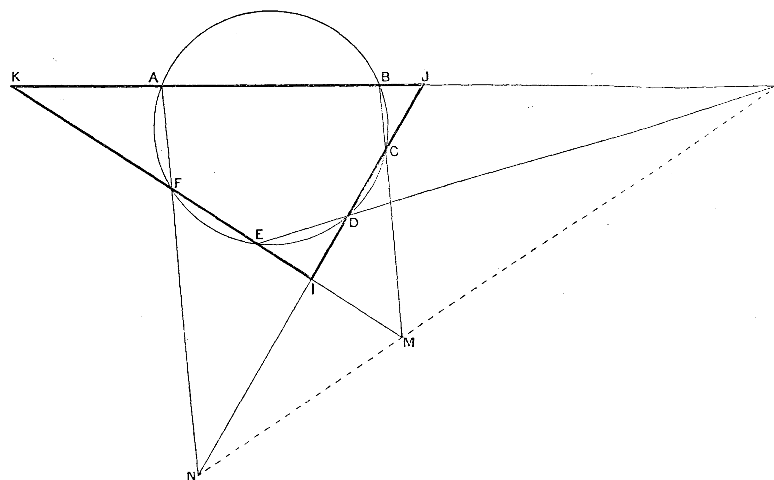


Fig. 177.

inscrit à un cercle, les points de concours des côtés opposés sont en ligne droite.

Soit l'hexagone ABCDEF (*fig.* 177) dans lequel les côtés opposés

AB, DE se coupent en L, les côtés BC, EF en M, les côtés CD, FA en N. Considérons le triangle IJK formé par les côtés AB, CD, EF, autrement dit par les côtés de l'hexagone donné, pris de deux en deux. Les points L, M, N sont respectivement situés sur les côtés JK, KI, IJ de ce triangle. Ces points sont en ligne droite si l'on a la relation

$$\frac{LJ}{LK} \cdot \frac{MK}{MI} \cdot \frac{NI}{NJ} = 1. \tag{3}$$

Or, si nous coupons successivement le triangle IJK par chacun des côtés restants DE, BC, FA de l'hexagone, nous obtenons les relations

$$\frac{LJ}{LK} \cdot \frac{EK}{EI} \cdot \frac{DI}{DJ} = 1,$$
$$\frac{MK}{MI} \cdot \frac{CI}{CJ} \cdot \frac{BJ}{BK} = 1,$$
$$\frac{NI}{NJ} \cdot \frac{AJ}{AK} \cdot \frac{FK}{FI} = 1.$$

Multiplions membre à membre ces trois égalités : nous pouvons écrire, en groupant convenablement les facteurs au numérateur et au dénominateur,

$$\frac{LJ}{LK} \cdot \frac{MK}{MI} \cdot \frac{NI}{NJ} \cdot \frac{CI \cdot DI}{EI \cdot FI} \cdot \frac{AJ \cdot BJ}{CJ \cdot DJ} \cdot \frac{EK \cdot FK}{AK \cdot BK} = 1.$$

Or, chacune des trois dernières fractions qui figurent au premier membre est égale à 1. Par exemple, les produits CI.DI et EI.FI sont égaux comme produits de segments interceptés par le cercle sur des sécantes issues du point I.

On a donc la relation (3) et le théorème est démontré.

Remarque. — La démonstration précédente subsiste lorsque les points A, B ; C, D ; E, F viennent se confondre deux à deux, les côtés du triangle IJK étant alors tangents au cercle. Le théorème devient alors le suivant : *Les tangentes menées par les sommets d'un triangle au cercle circonscrit coupent les côtés correspondants en trois points en ligne droite.*

197. Théorème.— *Si, par les sommets d'un triangle* ABC (*fig.* 178), *on mène les droites* Aa Bb, Cc *concourantes en un même point* O, *ces droites*

coupent respectivement les côtés BC, CA, AB *en trois points* a, b, c *tels que l'on ait la relation*

$$(4) \qquad \frac{aB}{aC}\cdot\frac{bC}{bA}\cdot\frac{cA}{cB} = -1.$$

En effet, le triangle AaC, coupé par la transversale BOb, donne [1]

$$\frac{Ba}{BC}\cdot\frac{bC}{bA}\cdot\frac{OA}{Oa} = 1\,;$$

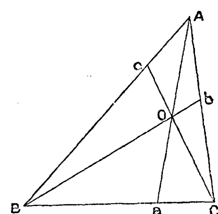


Fig. 178.

le triangle AaB, coupé par la transversale Cc, donne,

$$\frac{Ca}{CB}\cdot\frac{cB}{cA}\cdot\frac{OA}{Oa} = 1.$$

Divisons membre à membre : le rapport $\frac{OA}{Oa}$ disparaît, et il vient :

$$\frac{aB}{aC}\cdot\frac{bC}{bA}\cdot\frac{cA}{cB}\cdot\frac{CB}{BC} = 1,$$

ce qui équivaut à l'égalité (4), puisque CB $= -$ BC.

198. Réciproque (Théorème de *Céva*). — *Si, sur les côtés d'un triangle* ABC, *on prend trois points* a, b, c *tels que l'on ait la relation*

$$\frac{aB}{aC}\cdot\frac{bC}{bA}\cdot\frac{cA}{cB} = -1,$$

les droites Aa, Bb, Cc *sont concourantes.*

Soit, en effet, O le point de rencontre de Aa, Bb. La droite CO coupe le côté AB en un point c' tel que

$$\frac{aB}{aC}\cdot\frac{bC}{bA}\cdot\frac{c'A}{c'B} = -1.$$

Cette égalité, rapprochée de celle qui est donnée dans l'hypothèse, donne $\frac{cA}{cB} = \frac{c'A}{c'B}$. Donc les points c et c' coïncident.

C. Q. F. D.

Si les droites Aa, Bb étaient parallèles, la droite Cc serait parallèle

(1) Le raisonnement subsiste si le point O est rejeté à l'infini, c'est-à-dire si les trois droites Aa, Bb, Cc sont parallèles. Nous avons vu, en effet, que le théorème du n° **192** subsistait pour une transversale parallèle à l'un des côtés du triangle.

aux premières et les trois droites devraient être considérées comme concourant à l'infini.

Ce théorème sert à démontrer que trois droites sont concourantes.

EXEMPLE. — *Les médianes d'un triangle sont concourantes.*

Car si a, b, c sont les milieux des côtés du triangle, les rapports $\frac{aB}{aC}, \frac{bC}{bA}, \frac{cA}{cB}$ sont égaux à -1.

On montrerait d'une façon analogue que les bissectrices des angles d'un triangle sont concourantes ; etc.

EXERCICES

223. Déduire le théorème de Ménélaüs, dans le cas où tous les points de division sont extérieurs, de ce fait que les trois cercles qui, dans l'exercice 127, déterminent le point cherché, ont les mêmes points d'intersection (nº **189**).

224. Une droite coupe les côtés d'un triangle ABC en trois points a, b, c. On prend le symétrique de chacun de ceux-ci par rapport au milieu du côté sur lequel il est situé. Montrer que les nouveaux points a', b', c' ainsi obtenus sont en ligne droite.

Lorsque les points a, b, c sont les projections, sur les côtés, d'un point du cercle circonscrit (ex. 72), il en est de même des points a', b', c'.

225. Le côté OAB d'un angle est fixe, ainsi que les points A, B pris sur ce côté pendant que le second côté OA′B′ tourne autour du sommet O en entraînant les points A′, B′ pris sur ce côté à des distances constantes de O. Quel est le lieu du point d'intersection de AA′, BB′?

226. On donne un angle et trois points A, B, C en ligne droite. Une transversale mobile menée par A coupe les côtés de l'angle en M, N. Lieu de l'intersection de BM, CN.

227. Trois droites concourantes issues des sommets d'un triangle ABC coupent les côtés opposés en a, b, c. On prend les symétriques a', b', c' de ces points par rapport aux milieux des côtés sur lesquels ils sont situés. Montrer que Aa', Bb', Cc' sont encore concourantes.

228. Les droites qui joignent les sommets d'un triangle aux points de contact des côtés opposés avec le cercle inscrit sont concourantes.

229. A′B′C′ est le triangle déduit de ABC en menant (comme au nº **53**) par chaque sommet de celui-ci une parallèle au côté opposé ; a, b, c sont des points pris respectivement sur BC, CA, AB.

Si Aa, Bb, Cc sont concourants, A′a, B′b, C′c le sont aussi.

230. Si les droites Aa, Bb, Cc sont concourantes et qu'on prenne les conjugués harmoniques de a, b, c par rapport aux côtés BC, CA, AB, sur lesquels ils sont situés, ces conjugués sont en ligne droite.

Application : Aa, Bb, Cc sont les bissectrices des angles.

231. Si les droites Aa, Bb, Cc aboutissant aux côtés BC, CA, AB d'un triangle sont concourantes, et que la circonférence abc coupe à nouveau les côtés en a', b', c', les droites Aa', Bb', Cc' sont encore concourantes.

CHAPITRE III

RAPPORT ANHARMONIQUE. — FAISCEAUX HARMONIQUES

199. Soient A, B, C, D quatre points en ligne droite. On nomme *rapport anharmonique* de ces quatre points, et l'on désigne par le symbole (ABCD), le quotient du rapport des distances du point C aux points A et B par le rapport des distances du point D aux mêmes points, soit :

$$\frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB}.$$

Cette expression peut encore s'écrire $\frac{CA \cdot DB}{CB \cdot DA}$. C'est, par conséquent, le quotient de deux des produits qu'on peut former avec des segments joignant deux à deux les points donnés et n'ayant aucune extrémité commune. Elle dépend de l'ordre dans lequel on range les quatre points ; mais on voit sans difficulté *qu'elle ne change pas quand on échange entre eux deux des points, pourvu qu'on échange également les deux autres.*

Si le point D s'éloigne à l'infini, le rapport $\frac{DA}{DB}$ tend vers 1. Donc le rapport anharmonique des points [1] A, B, C, ∞ est égal à $\frac{CA}{CB}$.

Si les quatre points forment une division harmonique, les rapports $\frac{CA}{CB}$ et $\frac{DA}{DB}$ sont égaux et de signes contraires, et le rapport anharmonique est égal à -1. Inversement, il est clair que cette condition entraîne la première.

200. Théorème. — *Quatre droites issues d'un même point coupent une transversale quelconque en quatre points dont le rapport anharmonique est indépendant de la transversale.*

(1) Comme en algèbre, le symbole ∞ représente l'infini.

Soient les quatre droites OAA′, OBB′, OCC′, ODD′ (*fig.* 179). Ces quatre droites étant coupées par les deux transversales ABCD, A′B′C′D′, je dis que

$$\frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB} = \frac{C'A'}{C'B'} : \frac{D'A'}{D'B'}.$$

Pour le démontrer, menons par les points B,B′ les parallèles Bcd, B′$c'd'$ à OA : la première coupant OC en c et OD en d, la seconde coupant OC en c' et OD en d'.

On a

$$\frac{CA}{CB} = \frac{OA}{cB}$$

$$\frac{DA}{DB} = \frac{OA}{dB}$$

d'où par division

$$\frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB} = \frac{dB}{cB}.$$

On aurait de même

$$\frac{C'A'}{C'B'} : \frac{D'A'}{D'B'} = \frac{d'B'}{c'B'}.$$

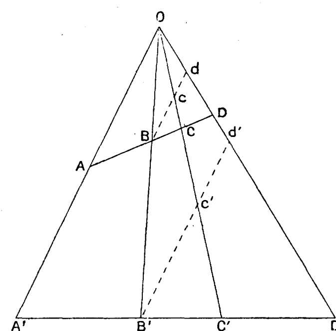


Fig. 179.

La relation de l'énoncé est donc démontrée, car les rapports $\frac{dB}{cB}$ et $\frac{d'B'}{c'B'}$ sont manifestement égaux, les sécantes Bcd, B′$c'd'$ étant parallèles entre elles.

Le rapport anharmonique constant déterminé par les quatre droites sur une transversale quelconque est dit *rapport anharmonique du faisceau* des quatre droites.

L'opération par laquelle on passe des points A, B, C, D aux points A′, B′, C′, D′ appartient à la catégorie de celles qu'on nomme *perspectives* ou *projections centrales* [1].

La longueur d'un segment, AB par exemple, est altérée par une telle opération; les rapports mêmes de tels segments sont changés ;

(1) Ces opérations seront définies en géométrie de l'espace.

mais nous voyons que le rapport anharmonique est conservé par une projection quelconque : *le rapport anharmonique est projectif.*

201. En particulier, si les points C, D divisent harmoniquement le segment AB, on obtiendra, en joignant les quatre points A, B, C, D à un même point quelconque O, un faisceau qui divisera harmoniquement une droite quelconque. Un tel faisceau est dit faisceau *harmonique;* les deux rayons OC, OD sont *conjugués harmoniques* par rapport aux rayons OA, OB et inversement.

Théorème. — *Pour qu'un faisceau soit harmonique, il faut et il suffit qu'une parallèle à l'un des rayons soit divisée en deux parties égales par les trois autres.*

Car, dans la figure du numéro précédent, nous savons que le rapport anharmonique $\frac{CA}{CB}:\frac{DA}{DB}$ est égal à $\frac{dB}{cB}$, lequel est égal à -1 si le point B est le milieu de cd, et alors seulement.

Corollaires. — I. *Les deux droites* OM_1, OM_2 (*fig.* 159, n° **151**), *qui constituent le lieu des points tels que le rapport de leurs distances à deux droites* D, D′ *ait une valeur donnée*, *forment avec celle-ci un faisceau harmonique.*

Car, dans la figure 159, le segment M_1M_2 est évidemment divisé en deux parties égales par la droite D.

Réciproquement, si deux rayons OC, OD sont conjugués harmoniques par rapport à deux autres OA, OB, le rapport des distances d'un point quelconque de OA aux droites OA, OB est égal au rapport des distances d'un point quelconque de OD aux mêmes droites[1].

II. *Les bissectrices des angles formés par deux droites déterminent avec elles un faisceau harmonique* (**115**).

Réciproquement, *si, dans un faisceau harmonique, deux rayons conjugués sont rectangulaires, ils sont les bissectrices des angles des deux autres.*

Car si les droites OA, OB, OC, OD forment un faisceau harmonique, la parallèle Bcd au rayon OA est divisée en deux parties

(1) Cette conclusion doit être modifiée si l'on a égard aux signes (en choisissant un sens positif sur la direction perpendiculaire à OA et un sens positif sur la direction perpendiculaire à OB) : les deux rapports en question sont alors égaux et de signes contraires.

égales au point B. Si donc OA et OB sont perpendiculaires, OB est perpendiculaire au milieu de *cd* et divise en deux parties égales l'angle $\widehat{cOd}$.

202. Théorème. — *Chaque diagonale d'un quadrilatère complet est divisée harmoniquement par les deux autres.*

Dans le quadrilatère complet ABCDEF (*fig.* 180), les diagonales CD,

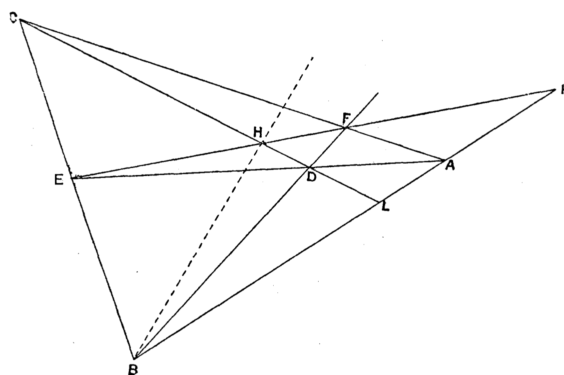


FIG. 180.

EF se coupent au point H; soit K le conjugué harmonique de H par rapport au segment EF. Les droites AE, AF, AH, AK forment un faisceau harmonique, et par conséquent le point L, où la droite AK coupe la diagonale CD, est conjugué de H par rapport au segment CD. Mais les droites BE, BF, BH, BK forment aussi un faisceau harmonique et le point L′ où BK rencontre CD est aussi conjugué de H par rapport à CD; il coïncide donc avec L et la droite KL n'est autre que AB.

203. Si, par un point pris dans le plan d'un angle, on mène une sécante variable, le lieu du conjugué harmonique du point donné par rapport au segment intercepté sur la sécante par les côtés de l'angle est évidemment une droite : à savoir, le rayon conjugué harmonique, par rapport à l'angle donné, de celui qui joint le sommet de ce dernier au point donné.

Cette droite est dite la *polaire* du point par rapport à l'angle.

Théorème. — *Si, par un point* A *pris dans le plan d'un angle* $\widehat{CBD}$

(*fig.* 180), *on mène deux sécantes* ADE, AFC *et que l'on joigne deux à deux les points d'intersection* C, D, E, F *de ces sécantes avec les côtés de l'angle, le lieu des points* H *où se coupent les droites* CD, EF *est la polaire du point* A *par rapport à l'angle.*

Car les droites BC, BD, BA, BH forment un faisceau harmonique, puisqu'elles divisent harmoniquement la droite EF.

Ce théorème donne un moyen très simple de construire la polaire d'un point par rapport à un angle.

EXERCICES

232. Si deux faisceaux de quatre droites, les unes issues du point O, les autres du point O′, ont même rapport anharmonique et un rayon homologue commun (la droite OO′), les points de rencontre des autres rayons homologues sont en ligne droite.

233. Si, sur deux droites OABC, OA′B′C′ concourantes en O, on prend d'une part trois points A, B, C; d'autre part trois points A′, B′, C′, tels que les rapports anharmoniques OABC, OA′B′C′ soient égaux : les droites AA′, BB′, CC′ passent par un même point.

234. Quelle est la condition nécessaire et suffisante pour qu'on puisse construire un parallélogramme ayant ses côtés et ses diagonales respectivement parallèles à quatre droites données ?

235. On donne une droite xy et deux points A, B hors de cette droite. On joint un point M du plan aux points A, B. Soient P, Q les points d'intersection des droites MA, MB avec xy. Trouver le lieu du point M′ où se coupent les droites PB, QA, lorsque le point M décrit une droite donnée ?

Examiner le cas où les droites AP, BQ, au lieu de se couper en un point M situé sur une droite donnée, sont parallèles entre elles.

236. Si, par deux points qui divisent harmoniquement un diamètre d'un cercle, on mène des perpendiculaires à ce diamètre, ces droites sont coupées par une tangente quelconque en deux points tels que le rapport de leurs distances au centre est constant.

CHAPITRE IV

POLES ET POLAIRES DANS LE CERCLE

204. Théorème. — *Si, par un point a pris dans le plan d'un cercle, on mène une sécante variable qui coupe la circonférence en* M, N, *le lieu du point* P, *conjugué harmonique de a par rapport au segment* MN, *est une droite* (*fig.* 181).

En effet, le milieu I de aP satisfait (**189**) à la relation

$$\overline{\text{I}a}^2 = \overline{\text{IM}} \cdot \text{IN}.$$

Il appartient donc à une droite fixe, l'axe radical du cercle donné et du point a (**136**, *Remarque*).

Fig. 181.

Le point P décrit une droite homothétique de celle-là par rapport au point a, le rapport d'homothétie étant égal à 2.

Inversement, un point P quelconque de la droite ainsi déterminée appartient au lieu si la ligne aP coupe le cercle (ce qui a toujours lieu si a est intérieur).

Cette droite, lieu du point P, est dite la *polaire* du point a par rapport au cercle, et celui-ci est dit le *pôle* de la droite.

La polaire du point a est perpendiculaire à la droite qui joint ce point au centre O *du cercle, en un point* H, *situé du même côté du centre que le point a et donné par la relation*

$$(5) \qquad \text{O}a \cdot \text{OH} = \text{R}^2,$$

R *étant le rayon du cercle.*

Cette relation exprime, en effet, que les points a, H divisent harmoniquement le diamètre situé sur la droite Oa.

Les segments Oa, OH comprenant entre eux le rayon R, puisqu'il est leur moyenne proportionnelle, *la polaire coupe la circonférence ou ne la coupe pas, suivant que le pôle est extérieur ou intérieur.*

Si le point a est extérieur au cercle, la polaire de ce point n'est autre que la corde de contact des tangentes menées par ce point.

Car le raisonnement qui nous a servi à établir l'existence de la polaire reste vrai si la sécante aMN de la figure 181 devient tangente, les points M et N coïncidant tous deux avec le point de contact T de cette tangente. Le point P est alors en T et la polaire doit passer par ce point.

Lorsque le point a est sur le cercle, la définition de la polaire comme lieu géométrique cesse d'avoir un sens à proprement parler [1]; mais nous pouvons définir cette droite par la construction que nous en avons donnée en second lieu : le point H coïncide, dans ce cas, avec a, et *la polaire est la tangente en ce point.*

Le segment OH, tiré de la relation (5), est infini dans un seul cas, celui où le point a vient en O, et la construction correspondante est en défaut dans ce seul cas. Il est d'ailleurs évident *à priori* que la polaire est rejetée à l'infini, puisque le point O est le milieu de toutes les cordes qui passent en ce point.

La même relation permet, inversement, de trouver le pôle connaissant la polaire. On abaissera du centre, sur cette droite, la perpendiculaire OH et l'on portera sur cette droite un segment Oa déterminé par la relation (5). *Il n'y a d'impossibilité que* si OH est nul, c'est-à-dire *si la droite est un diamètre, le pôle étant alors rejeté à l'infini, dans la direction perpendiculaire au diamètre.*

205. La propriété la plus importante de la polaire est la suivante :

Théorème. — *Si un point a est sur la polaire d'un point b, réciproquement celui-ci appartient à la polaire du point a.*

(Les points a et b sont dits alors *conjugués* par rapport au cercle. Leurs polaires, c'est-à-dire deux droites telles que chacune d'elles

[1] L'un des points M, N coïncide toujours avec a, et par conséquent il en est de même, en général, du point P ; mais lorsque la sécante devient tangente, les deux points M, N étant en a, le point P est indéterminé sur cette tangente.

contienne le pôle de l'autre, sont dites également *conjuguées*).

Le point a (*fig.* 182) appartenant à la polaire de b, sa projection sur Ob est un point K tel que $OK.Ob = R^2$. Soit H la projection de b sur Oa : le quadrilatère $aHbK$ sera inscriptible à un cercle (le cercle décrit sur ab comme diamètre) et l'on aura

$$OH{\cdot}Oa = OK{\cdot}Ob = R^2.$$

Donc Hb est bien la polaire du point a.

C. Q. F. D.

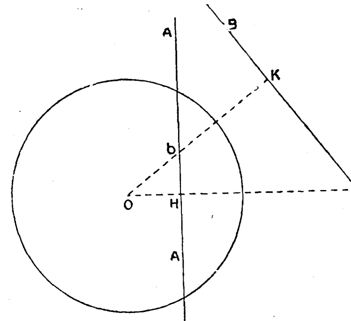


Fig. 182.

Remarque. — Le théorème est évident si la droite ab coupe le cercle, l'hypothèse et la conclusion exprimant la même chose, à savoir, que le cercle divise ab harmoniquement.

206. Le théorème qui précède permet de passer des propriétés d'une figure (F) à celles d'une figure (F′), que nous allons définir et qui est dite la *polaire réciproque* ou *corrélative* de la première.

Soit une figure (F), composée d'un nombre quelconque de lignes droites et de points [1]. A chaque point a de cette figure, nous ferons correspondre une droite A, à savoir la polaire de a par rapport à un certain cercle, choisi une fois pour toutes et appelé *cercle directeur*. A chaque droite B de la figure (F), nous ferons correspondre un point b, à savoir le pôle de B par rapport au cercle directeur. Les droites A et les points b constitueront la figure (F′), polaire réciproque de (F).

D'après le théorème précédent :

Si la droite B de la figure (F) passe par le point a, le point correspondant b de la figure (F′) est sur la droite A qui correspond à a.

Par conséquent, *si une droite de la figure* (F) *tourne autour d'un point fixe, le point correspondant de la figure* (F′) *décrit une droite, et réciproquement :*

(1) La définition des figures polaires réciproques s'étend, à l'aide de notions que nous n'avons pas à présenter ici, aux figures qui contiennent des lignes courbes.

Ou encore *si trois droites de la figure* (F′) *sont concourantes, les points correspondants de* (F′) *sont en ligne droite, et réciproquement.*

207. Supposons, par exemple, que la figure (F) soit la figure du nº **195** (*fig.* 176), formée par deux triangles abc, $a'b'c'$, tels que les droites aa', bb', cc' passent par un même point O. Les polaires A, B, C, A′, B′, C′ des points a, b, c, a', b', c' formeront deux nouveaux triangles et, aux droites aa', bb', cc', correspondront les points d'intersection des côtés A, A′; B, B′; C, C′. Puisque les premières passent par un même point, les seconds sont en ligne droite.

Inversement, tout couple de triangles dont les côtés se correspondent de sorte que les points d'intersection des côtés correspondants soient en ligne droite, peut être considéré comme la figure polaire réciproque d'un couple de triangles analogues à abc, $a'b'c'$.

Or, nous avons démontré que les points d'intersection des côtés correspondants des triangles abc, $a'b'c'$ étaient en ligne droite; donc les droites correspondant à ces points, — c'est-à-dire les droites qui joignent les sommets correspondants des triangles formés par A, B, C; A′, B′, C′, — sont concourantes. Autrement dit *la réciproque du théorème démontré nº* **195** *est vraie.*

208. Supposons maintenant que la figure (F) soit un hexagone inscrit au cercle et soient A, B, C, D, E, F (*fig.* 183) les côtés de cet hexagone. Prenons pour cercle directeur le cercle circonscrit : les polaires des sommets de l'hexagone seront les tangentes en ces points, qui se couperont deux à deux aux points a, b, c, d, e, f, pôles des côtés A, B, C, D, E, F. Ces derniers points seront les sommets d'un hexagone circonscrit au cercle. Inversement, tout hexagone circonscrit au cercle peut être considéré comme polaire réciproque d'un hexagone inscrit.

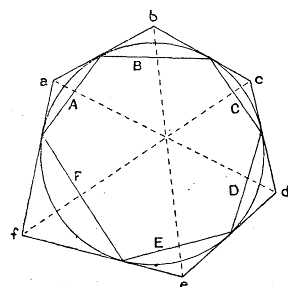


Fig. 183.

Or, nous avons démontré que, dans l'hexagone inscrit, les points de rencontre A, D; B, E; C, F sont en ligne droite (**196**). Nous avons donc le *théorème de Brianchon :*

Dans tout hexagone abcdef circonscrit à un cercle, les diagonales qui joignent les sommets opposés sont concourantes.

De même, le cas limite relatif au triangle inscrit (n° **196**, *Remarque*) nous donne : *Dans tout triangle circonscrit à un cercle, les droites qui joignent chaque sommet au point de contact du côté opposé sont concourantes.*

209. Nous venons de trouver ce qui correspond, dans la figure (F′), à trois points en ligne droite ou à trois droites concourantes de la figure (F) : propriétés que l'on nomme *descriptives*, par opposition à celles où figurent des mesures de grandeur, et que l'on nomme *métriques*. Nous allons apprendre à transformer quelques-unes de ces dernières.

Tout d'abord, *si deux droites de la figure* F *sont parallèles, leurs pôles sont, avec le centre* O *du cercle directeur, sur une même droite* (le diamètre perpendiculaire à la direction commune des parallèles), *et réciproquement.*

Par exemple, nous aurions pu ainsi démontrer aisément le théorème du n° **195**, en prenant la figure polaire réciproque par rapport à un cercle directeur ayant pour centre le point O (*fig.* 176). Aux points a, a'; b, b'; c, c' auraient correspondu des droites parallèles deux à deux et formant par conséquent deux triangles homothétiques, de sorte que les droites joignant les sommets correspondants de ces deux derniers triangles auraient été concourantes : d'où, en revenant à la figure primitive, la conclusion demandée.

Plus généralement, *l'angle de deux droites est égal à l'angle sous lequel le segment qui joint leurs pôles est vu du point* O, *ou à son supplément.* Car ces deux angles ont leurs côtés perpendiculaires (*fig.* 182).

Transformons, par exemple, le théorème relatif aux hauteurs d'un triangle (liv. I, n° **53**). Aux sommets a, b, c d'un triangle quelconque correspondront les côtés A, B, C d'un nouveau triangle. La hauteur abaissée du point a donnera, dans la nouvelle figure, un point situé sur A et, d'autre part, sur un rayon issu du point O et perpendiculaire à celui qui aboutit au sommet correspondant du nouveau triangle.

Les trois hauteurs du triangle *abc* se coupant en un même point, nous avons [1] la proposition suivante :

Si, par un point quelconque O *situé dans le plan d'un triangle, on mène des droites perpendiculaires à celles qui joignent ce point aux trois sommets, ces droites coupent les côtés correspondants en trois points en ligne droite.*

210. *Le rapport anharmonique de quatre droites* D_1, D_2, D_3, D_4, *concourantes en un point a, est égal à celui de leurs pôles* d_1, d_2, d_3, d_4. Car les deux faisceaux (Od_1, Od_2, Od_3, Od_4) et (D_1, D_2, D_3, D_4) sont égaux : ils se déduisent l'un de l'autre en transportant le premier parallèlement à lui-même de O en a, puis le faisant tourner d'un angle droit autour de ce dernier point. Ils ont donc même rapport anharmonique.

En particulier, ce théorème permet de transformer le rapport des distances du point d_3 aux points d_1, d_2. Il suffit, en effet, de supposer que le point d_4 soit à l'infini. La droite D_4 passe alors par le point O ; donc le rapport $\frac{d_3 d_1}{d_3 d_2}$ est égal au rapport anharmonique des droites D_1, D_2, D_3, aO.

211. Théorème. — *Si, par le point a pris dans le plan d'un cercle, on mène à ce cercle deux sécantes a*MN, *a*M′N′ (*fig.* 184) *et qu'on joigne deux à deux les points d'intersection* M, N, M′, N′ *de ces sécantes avec le cercle, les droites de jonction se coupent en deux points* H, K, *dont le lieu géométrique, lorsque les sécantes tournent autour du point a, est la polaire de ce point.*

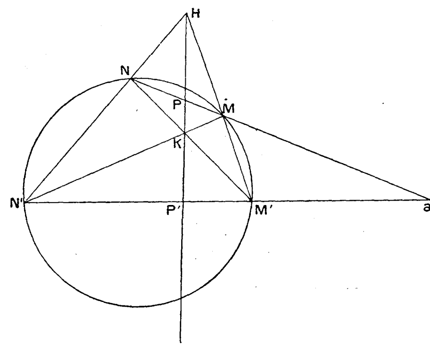


Fig. 184.

Soient, en effet, H le point d'intersection de MM′, NN′; K le point d'intersection de MN′, NM′. La droite HK coupe les cordes MN, M′N′ aux deux points P, P′,

[1] Comme dans les exemples précédents, la démonstration n'est pas complète si l'on ne remarque que l'on peut, en choisissant convenablement a, b, c, donner au point O et aux droites A, B, C des situations absolument quelconques.

conjugués harmoniques de a par rapport à ces cordes (**202**). Elle est donc la polaire du point a.

Ce théorème donne un moyen simple de construire la polaire d'un point par rapport à un cercle. Si le point est extérieur, il permet, par conséquent, de mener les tangentes issues de ce point, à l'aide de la règle seule.

Si les deux sécantes se confondent, le lieu précédent devient celui du point de concours des tangentes menées aux extrémités de la corde MN. Mais ce lieu nous était déjà connu (**205**), le point en question n'étant autre que le pôle de MN.

212. Théorème. — A, B, C, D *étant quatre points d'un cercle, le rapport anharmonique du faisceau obtenu en joignant ces points à un point quelconque* M *de ce cercle est indépendant de la position du point* M *sur la courbe.*

Si, en effet, M et M′ sont deux points du cercle, les deux faisceaux (MA, MB, MC, MD), (M′A, M′B, M′C, M′D) sont égaux, les droites qui les composent pouvant toujours être considérées (**82**) comme formant entre elles les mêmes angles avec les mêmes sens de rotation.

Remarque. — Rien n'empêche de prendre pour le point M l'un des points donnés, A par exemple. La droite MA serait alors remplacée par la tangente en A, et le raisonnement précédent subsisterait.

Le rapport anharmonique constant dont nous venons de parler est dit *rapport anharmonique des quatre points* A, B, C, D *sur le cercle*. Lorsqu'il est égal à — 1, les quatre points sont dits former sur le cercle une *division harmonique*.

Corollaire. — *Quatre tangentes fixes d'un cercle déterminent sur une tangente mobile un rapport anharmonique constant.*

Car la figure formée par les quatre points d'intersection des tangentes fixes avec la tangente mobile a pour polaire réciproque, par rapport au cercle donné, le faisceau (MA, MB, MC, MD) du théorème précédent.

On nomme *rapport anharmonique de quatre tangentes à un cercle* le rapport anharmonique que ces tangentes interceptent sur une tangente mobile quelconque. Il résulte de notre raisonnement que

le *rapport anharmonique de quatre tangentes est égal à celui de leurs points de contact.*

213. Théorème. — *Deux cordes conjuguées par rapport à un cercle divisent harmoniquement ce cercle.*

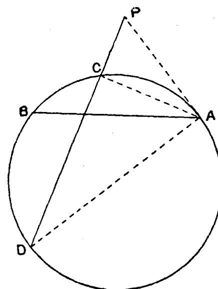


Fig. 185.

Soient les deux cordes AB, CD (*fig.* 185) telles que CD passe par le pôle P de AB. Les droites AP, AB, AC, AD forment un faisceau harmonique, puisqu'elles divisent harmoniquement la sécante PCD. Or, le rapport anharmonique de ce faisceau est celui des points A, B, C, D sur le cercle, puisque la droite AP est la tangente en A.

Corollaire. — *Les quatre tangentes menées au cercle par deux points conjugués divisent harmoniquement une tangente quelconque.*

EXERCICES

237. Deux points A, B sont conjugués par rapport à un cercle de centre O. Montrer :

1° Que les cercles décrits avec A, B comme centres respectifs et coupant orthogonalement le cercle O sont orthogonaux entre eux ;

2° Que le cercle décrit sur AB comme diamètre coupe orthogonalement le cercle O.

Quelle est la relation qui existe entre les trois côtés du triangle OAB et le rayon R du cercle ?

238. Déduire de l'exercice précédent (2°) le lieu des points tels que leurs polaires par rapport à trois cercles donnés soient trois droites concourantes, et le lieu du point de concours.

239. Si, par les sommets d'un quadrilatère inscrit à un cercle, on mène les tangentes à la courbe, de manière à former un quadrilatère circonscrit :

1° Les diagonales des deux quadrilatères passent par un même point et forment un faisceau harmonique ;

2° Les troisièmes diagonales des deux quadrilatères sont situées sur une même droite et se divisent harmoniquement.

240. Par deux points d'une droite D, on mène les tangentes à un cercle. On forme ainsi un quadrilatère dont une diagonale est la droite D elle-même. Montrer que les deux autres diagonales passent par le pôle de D.

241. On considère deux circonférences O, O′ et leurs points limites (ex. 152) P, Q :

1° La polaire d'un point limite est la même dans l'une ou l'autre circonférence. Elle passe par l'autre point limite ;

2° Il n'y a pas d'autre point (à distance finie) qui ait même polaire dans les deux cercles ;

3° La perpendiculaire abaissée sur la ligne des centres par le point d'intersection d'une tangente commune intérieure et d'une tangente commune extérieure passe par un des points P, Q (on montrera que cette droite a même pôle par rapport aux deux cercles) ;

4° La droite qui joint les points de contact, avec l'une des circonférences, d'une tangente commune extérieure et d'une tangente commune intérieure passe également par l'un des points P, Q.

CHAPITRE V

FIGURES INVERSES

214. On nomme *inverse* (ou *transformé par rayons vecteurs réciproques*) d'un point M, le *pôle d'inversion* étant le point O (*fig.* 186-187) et la *puissance d'inversion* la quantité k, le point M′ de la droite OM tel que :

$$OM \cdot OM' = k.$$

Bien entendu, le segment [1] OM′ devra être porté dans le sens OM (*fig.* 186) ou dans le sens opposé (*fig.* 187), suivant que k est positif ou négatif.

On voit immédiatement que :

1° Tout point a un inverse, sauf le pôle, dont l'inverse est rejeté à l'infini.

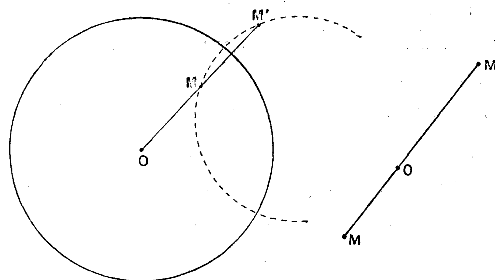


Fig. 186-187.

2° Si le point M′ est inverse du point M, réciproquement celui-ci est inverse du premier.

On nomme *figure inverse* d'une figure F la figure F′, formée par les inverses des différents points de F.

(1) Les segments OM, OM′ sont dits *rayons vecteurs* des points M, M′.

215. Théorème. — *Deux figures inverses d'une même troisième* F *par rapport au même pôle* O *sont homothétiques l'une de l'autre.*

Soient, en effet, M un point de F ; M′, M'_1 les points qui lui correspondent dans les deux inversions de pôle commun O et de puissances respectives k, k_1. Les égalités

$$OM \cdot OM' = k$$
$$OM \cdot OM'_1 = k_1$$

donnent par division :

$$\frac{OM'_1}{OM'} = \frac{k_1}{k}.$$

C. Q. F. D.

On voit que le choix de la puissance d'inversion est sans influence sur la forme des figures obtenues. Cette forme ne change que par le changement du pôle d'inversion.

216. Lorsque la puissance d'inversion k est positive, on peut, du pôle comme centre avec $\sqrt{k}$ comme rayon, décrire un cercle (*fig.* 186). Ce cercle, qui suffit évidemment à définir la transformation, a reçu le nom de *cercle d'inversion.* Il est le lieu des points qui coïncident avec leurs inverses.

Deux points inverses sont conjugués par rapport au cercle d'inversion.

Tout cercle passant par deux points inverses coupe à angle droit le cercle d'inversion (**135**). — *Réciproquement, si deux points* M,M′ *sont tels, que toute circonférence passant par ces deux points coupe à angle droit un cercle donné, ils sont inverses par rapport à ce dernier* (**135-137**).

Lorsque deux points sont symétriques par rapport à une droite, tout cercle qui passe par ces deux points coupe la droite à angle droit, puisque celle-ci en est un diamètre. *Nous sommes donc conduits à considérer la symétrie par rapport à une droite comme un cas limite de l'inversion*, le cercle d'inversion étant une droite et, par conséquent, le pôle rejeté à l'infini.

217. *Deux points quelconques* A, B (*fig.* 188) *et leurs inverses* A′, B′ *sont toujours sur une même circonférence* (**131** *bis*).

(1) Inversement, la symétrie par rapport à une droite s'appelle aussi *réflexion* par rapport à cette droite ; et, par extension, l'inversion par rapport à un cercle se nomme souvent aussi *réflexion*, le point inverse d'un point M étant son *image* par rapport au cercle.

Il en résulte (**82**) que *l'angle que fait* AB, *avec le rayon vecteur* OAA' *est égal, mais de sens contraire, à l'angle que fait* A'B' *avec le rayon vecteur* OBB'.

Cette remarque permet de trouver la direction A'B', connaissant celles de AB et des rayons vecteurs.

218. Problème. — *Connaissant la distance de deux points* A, B *et leurs rayons vecteurs, trouver la distance des points* A', B', *inverses des premiers.*

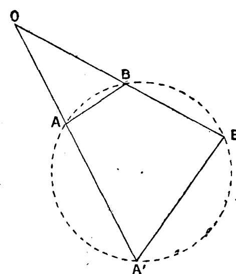


Fig. 188.

Les triangles semblables OAB, OA'B' (*fig.* 188) donnent $\frac{A'B'}{OA'} = \frac{BA}{OB}$.

En tirant A'B' de cette relation et remplaçant OA' par $\frac{k}{OA}$, il vient

$$A'B' = BA.\frac{k}{OA.OB}.$$

Remarque. — Le raisonnement précédent cesse de s'appliquer si les points A, B sont en ligne droite avec le pôle. Mais le résultat subsiste, et est même vrai en grandeur et en signe (un sens positif ayant été pris sur le rayon vecteur commun). C'est ce qui se voit en remplaçant respectivement A'B' et BA par

$$OB' - OA' = \frac{k}{OB} - \frac{k}{OA} \text{ et } OA - OB.$$

219. Théorème. — *Les tangentes aux points correspondants de deux lignes inverses font des angles égaux, mais de sens contraires avec le rayon vecteur commun des points de contact.*

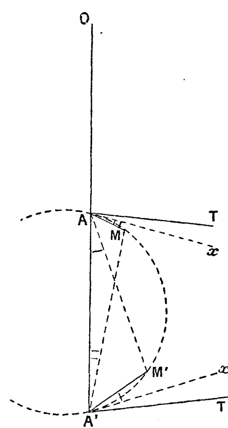


Fig. 189.

Soient A (*fig.* 189) un point d'une courbe **C**; A', le point correspondant de la courbe inverse **C**'. Soient M un point de **C**, voisin du point A, M' son inverse. Menons à la circonférence qui passe par les points A, A', M, M' (**217**) les tangentes Ax, A'x'. Lorsque le point M se rapprochera indéfiniment de A (et, par conséquent, le point M' de A')

les angles $\widehat{AA'M}$, $\widehat{A'AM'}$ tendront vers zéro, et il en sera de même de leurs égaux $\widehat{MAx}$, $\widehat{M'A'x'}$. Si donc la droite AM tend vers une position limite AT, Ax tendra vers la même position limite. Dès lors, la droite A$'x'$ aura une position limite A'T', faisant avec le rayon vecteur OAA' le même angle que AT, mais en sens contraire ; et, puisque l'angle $\widehat{M'A'x'}$ tend vers zéro, A'M' tendra aussi vers A'T'.

C. Q. F. D.

Corollaire. — *Les tangentes aux points correspondants de deux courbes inverses sont symétriques par rapport à la perpendiculaire au milieu de la droite qui joint les points de contact.*

Remarque. — Ce qui précède reste évidemment vrai, si l'inversion devient une symétrie par rapport à une droite.

Théorème. — *Deux courbes se coupent sous le même angle que leurs inverses (ou leurs symétriques), au sens de rotation près.*

En effet, l'angle formé par les tangentes à deux courbes, en un point commun A, et l'angle formé par les courbes inverses, au point correspondant A', sont symétriques par rapport à la perpendiculaire au milieu de AA'.

Corollaire. — *Si deux courbes se touchent, il en est de même de leurs inverses.*

220. Inverse d'une droite.

Théorème. — *La figure inverse d'une droite est une circonférence passant par le pôle d'inversion.*

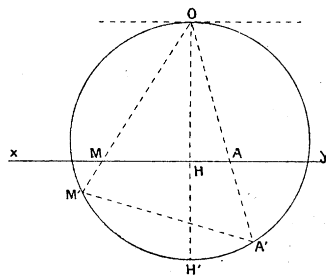


Fig. 190.

Soit xy (*fig.* 190) la droite donnée dont nous cherchons la figure inverse, O étant le pôle d'inversion. Prenons un point déterminé quelconque A, dont l'inverse est A'. Soient maintenant M un point quelconque de xy, M' son inverse. L'angle de M'A' avec OM' est égal et de sens contraire à l'angle de AM avec OA. Il est donc constant lorsque le point M varie sur la droite, et le lieu du point M' est une circonférence passant par les points O et A. C. Q. F. D.

En particulier, nous pouvons prendre pour le point A le point H, projection de O sur xy, et dont l'inverse est H'. L'angle $\widehat{OM'H'}$ est alors droit, et nous voyons que *la circonférence inverse a sa tangente en O parallèle à la droite donnée et son diamètre égal à* $\frac{k}{\delta}$, où k est la puissance d'inversion, et δ la distance OH du pôle à la droite.

Remarque. — L'énoncé précédent suppose que la droite ne passe pas par le pôle : dans le cas contraire, elle serait sa propre inverse.

Corollaire. — *La figure inverse d'une circonférence passant par le pôle est une droite*, à savoir la perpendiculaire élevée au diamètre du pôle, par le point inverse de celui qui est diamétralement opposé au pôle.

221. Inverse d'une circonférence quelconque.

Théorème. — *L'inverse d'une circonférence qui ne passe pas par le pôle, est une circonférence.*

Si, d'abord, la puissance d'inversion k est égale à la puissance p du pôle par rapport à la circonférence donnée, celle-ci est sa propre inverse, les points d'intersection avec une sécante quelconque issue du pôle étant évidemment inverses deux à deux.

Donc, si la puissance d'inversion k est quelconque (*fig.* 191), la figure inverse sera une circonférence homothétique de la première (**215**) avec le pôle pour centre de similitude et $\frac{k}{p}$ pour rapport de similitude.

222. Réciproquement, deux circonférences quelconques C, C' (*fig.* 191) peuvent être considérées comme inverses l'une de l'autre; et cela de deux manières différentes, puisqu'elles peuvent être considérées comme homothétiques de deux manières différentes. Le pôle d'inversion est alors un centre de similitude et la puissance d'inversion égale à la puissance de ce pôle par rapport à la première circonférence, multipliée par le rapport de similitude.

Ces deux inversions sont d'ailleurs les seules qui transforment l'une dans l'autre les deux circonférences données. Car si elles sont inverses par rapport à un certain pôle S, comme l'une d'elles est sa propre inverse par rapport à ce pôle, elles sont homothétiques par rapport à ce point.

223. D'après le raisonnement précédent, si une sécante issue du centre de similitude S coupe la circonférence C en M, N et la cir-

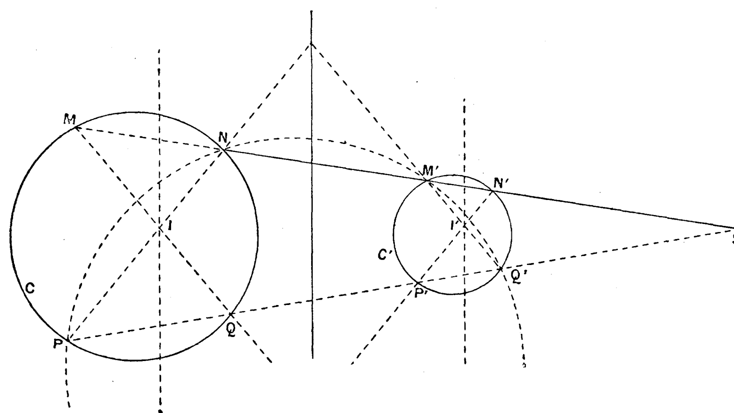


Fig. 191.

conférence C′ en M′, N′, de sorte que M′ soit l'homologue de M et N′ l'homologue de N dans les deux circonférences considérées comme figures homothétiques, les points inverses seront M, N′ d'une part; M′, N de l'autre.

Ces points ont également reçu le nom de points *antihomologues*.

Les seuls points à la fois homologues et antihomologues sont les points de contact des tangentes communes issues de S.

Les points communs aux deux circonférences, s'il en existe, sont leurs propres antihomologues.

La *corde antihomologue* d'une corde de la première circonférence est la corde de la seconde circonférence qui joint les points respectivement antihomologues des deux premiers.

224. *Deux couples de points antihomologues sont sur une même circonférence* (**217**) et par conséquent *deux cordes antihomologues se coupent sur l'axe radical* (**139**).

De plus, *deux cordes antihomologues coupent les polaires du centre de similitude, par rapport à leurs circonférences respectives, en deux points homologues*. Car la corde MQ, antihomologue de N′P′ (*fig.* 191), est homologue de la corde NP, laquelle coupe MQ en un point I situé sur la polaire de S par rapport au cercle C (**211**) et dont l'homo-

logue I′ est l'intersection de N′P′ avec la polaire de S par rapport au cercle C′.

Cette double propriété permet de construire la corde antihomologue d'une corde donnée sans faire intervenir les extrémités de ces cordes.

Elle s'applique, bien entendu, aux tangentes en des points antihomologues, qui sont un cas limite des cordes précédentes.

225. Si les deux circonférences sont égales, le centre de similitude externe étant rejeté à l'infini, l'homothétie correspondante se réduit à une translation et l'inversion correspondante à une symétrie ; les propriétés des points antihomologues sont d'ailleurs les mêmes que dans le cas général.

226. *Une droite et une circonférence peuvent également être regardées comme deux figures inverses, et cela de deux façons différentes.* — Les pôles d'inversion seront (**220**) les extrémités du diamètre perpendiculaire à la droite. La théorie des points antihomologues conduit donc à considérer ces points comme les centres de similitude de la circonférence et de la droite.

De deux cordes antihomologues, l'une est la droite donnée et, par conséquent, on peut encore dire que ces deux cordes se coupent sur l'axe radical, si l'on admet la convention du n° **158** (Constr. 12, *Remarque*).

Enfin *deux droites sont symétriques l'une de l'autre de deux manières différentes*, les axes de symétrie étant les bissectrices des angles formés par ces droites. Les cordes antihomologues sont alors les droites elles-mêmes et concourent en un point fixe, sommet commun des angles en question.

227. *Dans deux circonférences inverses l'une de l'autre, tout cercle* Σ *qui passe par deux points antihomologues est son propre inverse*, puisque la puissance du pôle d'inversion par rapport à ce cercle est égale à la puissance d'inversion. *Ce cercle coupe donc les deux cercles donnés sous le même angle; et, s'il est tangent à l'un, il l'est aussi à l'autre.*

Inversement, *tout cercle* Σ, *qui coupe deux circonférences* C, C′ (fig. 192) *sous le même angle, les coupe en quatre points antihomologues deux à deux dans l'une des deux inversions qui transforme ces circonférences l'une dans l'autre.*

Soient, en effet A, B ; A′, B′ les quatre points d'intersection, choisis de telle façon que les angles égaux (par hypothèse) que font les cercles C, Σ en A d'une part, C′ et Σ en A′ d'autre part soient de sens contraire; et de même pour B, B′. Si S est le point d'intersection

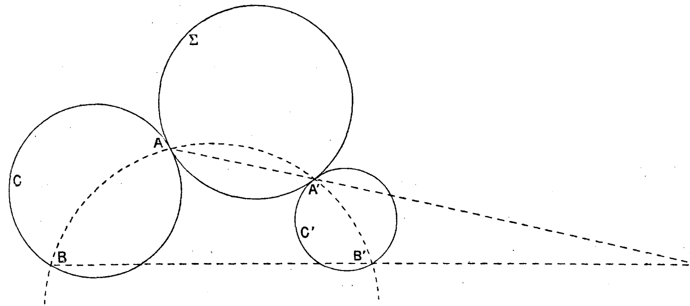


Fig. 192.

de AA′, BB′, et k la puissance de ce point par rapport au cercle Σ, l'inversion de pôle S et de puissance k ne change pas Σ; elle change A en A′, B en B′; elle change donc le cercle C en un cercle qui passe par les points A′ et B′ et touche en A′ le cercle C′ (d'après l'hypothèse et le n° **219**), c'est-à-dire qui coïncide avec C′ (**90**).

Cette conclusion subsiste lorsque le cercle Σ *est tangent à* C *et à* C′. Il suffit, pour le voir, de répéter le raisonnement qui précède en prenant pour S l'intersection de AA′ et de BB′, A et A′ étant les points de contact, B et B′ les seconds points de rencontre de C, C′ respectivement avec un cercle quelconque passant par A, A′ (*fig.* 192).

Dans ce dernier cas, d'ailleurs, la proposition précédente résulte du théorème du n° **144**; car les points de contact sont des centres de similitude, l'un pour Σ et C, l'autre pour Σ et C′. Ils sont donc en ligne droite avec un centre de similitude S de C, C′. Nous voyons même que *le centre de similitude* S *est externe, si les contacts sont de même espèce* [1]; *interne, dans le cas contraire.*

Bien entendu, les raisonnements donnés ci-dessus subsistent quand un des cercles C, C′, ou tous deux, ou le cercle Σ, sont remplacés par des droites.

(1) C'est-à-dire tous deux extérieurs ou tous deux intérieurs.

227 *bis*. Si le cercle Σ coupait les circonférences C, C′ à angle droit, on pourrait associer arbitrairement les points d'intersection pour les considérer comme antihomologues. Car deux angles droits peuvent toujours (en remplaçant, au besoin, un des côtés de l'un d'eux par son prolongement) être considérés comme égaux et de sens contraires. Donc, un cercle qui coupe les cercles C, C′ à angle droit se correspond à lui-même, tant dans l'une que dans l'autre des deux inversions qui permettent de passer de C à C′.

228. Si l'inversion qui a S pour pôle et qui change l'un dans l'autre les cercles C et C′ a un cercle d'inversion, ce cercle d'inversion Γ coupe à angle droit le cercle Σ, puisque la puissance du point S par rapport à Σ est égale à la puissance d'inversion.

Cette propriété correspond à la propriété des bissectrices des angles de deux droites. Celles-ci, en effet, forment le lieu des centres des cercles tangents aux deux droites : ce qui revient à dire que l'un quelconque de ces cercles coupe l'une ou l'autre des bissectrices à angle droit. Ici nous voyons que tout cercle Σ tangent à C et à C′ ou, plus généralement, tout cercle Σ qui coupe C et C′ sous le même angle, coupe orthogonalement le cercle Γ, ou le cercle analogue ayant pour centre l'autre centre de similitude (si ces cercles existent).

Le cercle Γ existe toujours si les cercles C, C′ se coupent : il passe alors par les points d'intersection.

D'une façon générale, lorsqu'il existe, il a, avec C et C′, même axe radical, puisque ces trois cercles admettent (n° précédent) la même série de cercles orthogonaux.

EXERCICES

242. Quand deux points sont inverses par rapport à un cercle, leurs distances à un point quelconque de ce cercle sont dans un rapport constant.

243. Montrer que l'exercice 68, dans le cas où la circonférence donnée en cet endroit coupe la droite en un point I, peut se ramener à l'exercice 65 par une inversion de pôle I.

244. Par un point A commun à deux circonférences, on mène deux sécantes AMM′, ANN′ qui coupent la première circonférence en M, N, la seconde en M′, N′. Les circonférences AMN′, ANM′ se coupent en A et en un second point dont on demande le lieu lorsque les deux sécantes prennent, indépendamment l'une de l'autre, toutes les positions possibles autour du point A.

245. Les inverses de circonférences qui ont même axe radical sont des circonférences ayant également même axe radical.

246. Transformer par inversion la définition de la circonférence (n° **56**).
On retrouve ainsi le théorème du n° **116**.

247. On prend l'inverse d'une circonférence donnée, par rapport à un pôle d'inversion donné. Trouver le point dont l'inverse est le centre de la circonférence transformée.

248. Transformer deux circonférences données (sans point commun) en deux circonférences concentriques par une même inversion.

249. Étant donnés trois points en ligne droite, trouver sur la même droite un quatrième point tel que, dans une inversion par rapport à ce point, les transformés des trois points donnés divisent la droite en deux parties égales.

250. Deux figures sont transformées l'une de l'autre par une inversion S. On les soumet toutes deux à une même inversion T. Montrer que les nouvelles figures ainsi obtenues sont aussi deux figures inverses, et trouver le nouveau pôle d'inversion. Examiner en particulier le cas où la puissance de l'inversion S est positive. (Le nouveau cercle d'inversion est alors le transformé de celui de S par l'inversion T.)

251. A une figure donnée A, on applique une inversion S qui la transforme en une figure B, puis à celle-ci une inversion S′ qui la transforme en une figure A′. Montrer, en se bornant au cas où les puissances de S et de S′ sont positives :

1° Que l'on peut, par une inversion convenablement choisie T, transformer les figures A, A′, soit en deux figures homothétiques, soit en deux figures égales; les deux possibilités s'excluant mutuellement [1] ;

2° Que l'on peut trouver, d'une infinité de manières, un couple d'inversions S_1, S'_1, équivalent au couple de S, S′: c'est-à-dire tel que les inversions S_1, S'_1, effectuées l'une après l'autre sur la figure A (comme l'ont été S, S′), conduisent à la même figure finale A′. En particulier, on peut toujours remplacer les deux inversions données par une inversion précédée ou suivie d'une symétrie, sauf dans un cas (celui où les figures A et A′ sont semblables);

3° Quand les figures transformées de A, A′, par l'inversion T définie en 1°, dérivent-elles l'une de l'autre par une translation ?

4° Qu'arrive-t-il lorsqu'on effectue plusieurs fois de suite les opérations successives S, S′ (c'est-à dire lorsqu'on transforme A′ par S en une figure B′, celle-ci par S′ en A″ ; celle-ci par S en B″, dont la transformée par S′ est A‴, etc.) ? Peut-il arriver qu'on retrouve finalement la figure primitive A ?

252. On effectue successivement (comme dans l'exercice précédent) des inversions quelconques S, S′, S″, etc. Montrer (en se bornant au cas où les puissances d'inversion sont positives) que cette suite d'opérations peut être remplacée par une seule inversion précédée ou suivie d'une, deux ou trois symétries, à moins que la figure initiale et la figure finale ne soient semblables (ex. précédent, 2° et ex. 94).

253. Les inversions S, S′, S″... (ex. précédent) étant supposées en nombre impair, trouver un point qui revienne à sa position primitive par ces opérations effectuées successivement.

(1) Sauf dans le cas auquel il est fait allusion en 3° et qui peut être considéré comme un cas limite commun, puisque la translation est une limite de l'homothétie.

253 *bis*. Inscrire dans un cercle une polygone dont les côtés passent respectivement par des points donnés ou soient parallèles à des droites données (ex. précédent).

254. Sur une tangente fixe à un cercle, à partir de son point de contact T, on porte deux segments TM, TN variables, mais dont le produit est constant. Soit T′ le point du cercle donné diamétralemement opposé à T :

1° Montrer que, si l'on joint entre eux les points d'intersection des droites T′M, T′N avec le cercle donné, la droite ainsi obtenue passe par un point fixe;

2° Même problème pour la droite qui joint entre eux les points de contact des secondes tangentes menées au cercle par les points M, N (se ramène au précédent).

3° Lieu du point d'intersection de ces secondes tangentes.

255. D'un point O, pris dans le plan d'un cercle, on mène une sécante variable qui coupe le cercle en M,N. Les circonférences qui ont pour diamètres respectifs OM, ON coupent à nouveau le cercle donné en M′,N′. Trouver le lieu décrit par le point d'intersection des droites MN, M′N′ lorsque la sécante tourne autour du point O.

256. Lorsqu'une circonférence variable coupe sous des angles constants deux cercles fixes, elle coupe aussi sous un angle constant tout cercle fixe ayant même axe radical avec les deux premiers.

257. Sur deux segments donnés AB, CD d'une même droite, on décrit des segments de cercle capables du même angle $\widehat{V}$. Trouver, lorsque l'angle $\widehat{V}$ varie : 1° le lieu du milieu de la corde commune aux circonférences dont font partie les segments; 2° le lieu de leurs points d'intersection; autrement dit, le lieu des points d'où l'on voit les segments de droite AB, CD sous des angles égaux ou supplémentaires.

CHAPITRE VI

PROBLÈMES DES CERCLES TANGENTS

229. Problème. — *Tracer un cercle passant par deux points donnés et tangent à une droite ou à une circonférence donnée.*

Nous avons déjà résolu ce problème (**159**). Mais l'inversion nous permet de donner une autre solution. Si nous transformons, en effet, la figure par rayons vecteurs réciproques en prenant pour pôle l'un des points donnés, le cercle cherché se transforme en une droite qui doit passer par un point connu et être tangente à un cercle connu (les inverses du second point et du cercle donnés).

230. Problème. — *Tracer un cercle qui passe par un point donné et touche deux droites (ou circonférences) données.*

Première méthode. — Le cercle cherché se correspond à lui-même dans une des deux inversions (ou symétries) qui transforment l'une dans l'autre les lignes données. On en connaît donc, outre le point donné, un second point, à savoir le transformé du premier par l'inversion ou symétrie en question, et l'on est ramené au problème précédent. Il pourra y avoir quatre solutions, puisque le problème précédent en a deux.

Deuxième méthode. — Prenons la figure inverse de la figure considérée, le pôle étant le point donné. Nous sommes ramenés au problème de la tangente commune à deux circonférences.

231. Problème. — *Tracer un cercle tangent à trois cercles donnés.*

Ce problème se ramène au précédent.

Soient, en effet, C, C′, C″ (*fig.* 193) les cercles donnés, de rayons

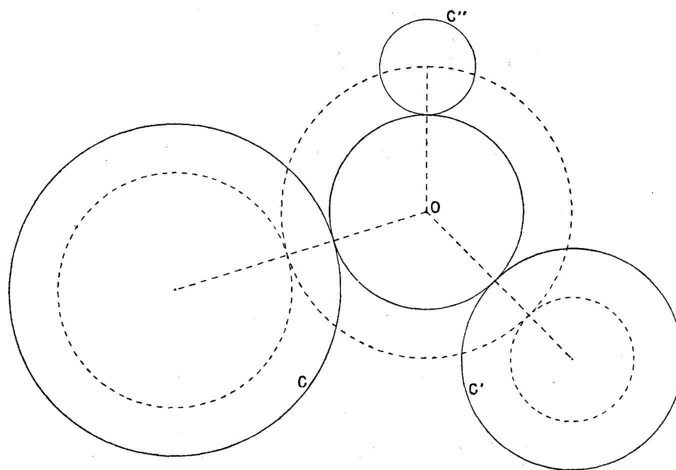


Fig. 193.

r, r', r'' et O un cercle de rayon R qui, pour fixer les idées, les touche tous trois extérieurement. Un cercle de centre O et de rayon $R + r''$ passera par le centre du cercle C″ et touchera les cercles concentriques à C, C′ et ayant pour rayons les différences entre les rayons r, r' respectivement et le rayon r''.

On traiterait d'une façon tout analogue le cas où les contacts ne seraient pas tous extérieurs, certaines différences devenant simplement des sommes et inversement.

232. Nous allons résoudre le même problème par une méthode toute différente (solution de *Gergonne*).

Soient A, B, C les cercles donnés. Cherchons d'abord un cercle Σ (*fig.* 194) ayant avec les cercles donnés des contacts de même espèce, aux points a, b, c.

S'il existe un tel cercle, il en existe nécessairement un second Σ'. En effet, le centre radical I des trois cercles donnés a même puissance par rapport à ces trois cercles : en prenant cette puissance pour puissance d'inversion et le point I pour pôle, l'inversion ne changera pas les cercles donnés et transformera le cercle Σ en un cercle Σ' touchant A, B, C en des points a', b', c', inverses de a, b, c. Les contacts seront d'ailleurs de même espèce, à savoir la même que pour Σ ou la contraire, suivant que I est pour les cercles Σ, Σ' un centre de similitude externe ou interne.

Nous allons démontrer que l'axe radical xy, des deux cercles cherchés n'est autre que l'axe de similitude direct (**145**) des trois cercles donnés. Pour cela, joignons ab, $a'b'$ qui se coupent en S. Le point S est sur l'axe radical des cercles Σ, Σ', puisque les points aa', bb' sont inverses deux à deux par rapport au point I. Or ce point S est le centre de similitude externe des cercles donnés A, B (**227**). On verrait de même que l'axe radical xy passe par les deux autres centres de similitude externe des cercles donnés.

Cela posé, menons les tangentes communes aux points de contact a, a' de A avec Σ, Σ'. Le point α où se coupent ces tangentes est sur xy, puisque les points a, a' sont inverses l'un de l'autre par rapport au point I. Or, ce point α est le pôle de aa' par rapport au cercle A.

Donc *la corde aa' passe par le pôle p de l'axe de similitude direct xy par rapport au cercle* A.

Nous sommes donc conduits à la construction suivante :

Déterminez le centre radical I *et l'axe de similitude direct xy des cercles donnés. Joignez le point* I *aux pôles p, q, r de xy par rapport à ces cercles. Les droites ainsi obtenues coupent respectivement les cercles correspondants aux points cherchés a, a'; b, b'; c, c'.*

233. Il nous reste à montrer que cette construction donnera effectivement des cercles satisfaisant aux conditions demandées.

Pour cela, nous allons faire voir que les points a, b, c, a', b', c',

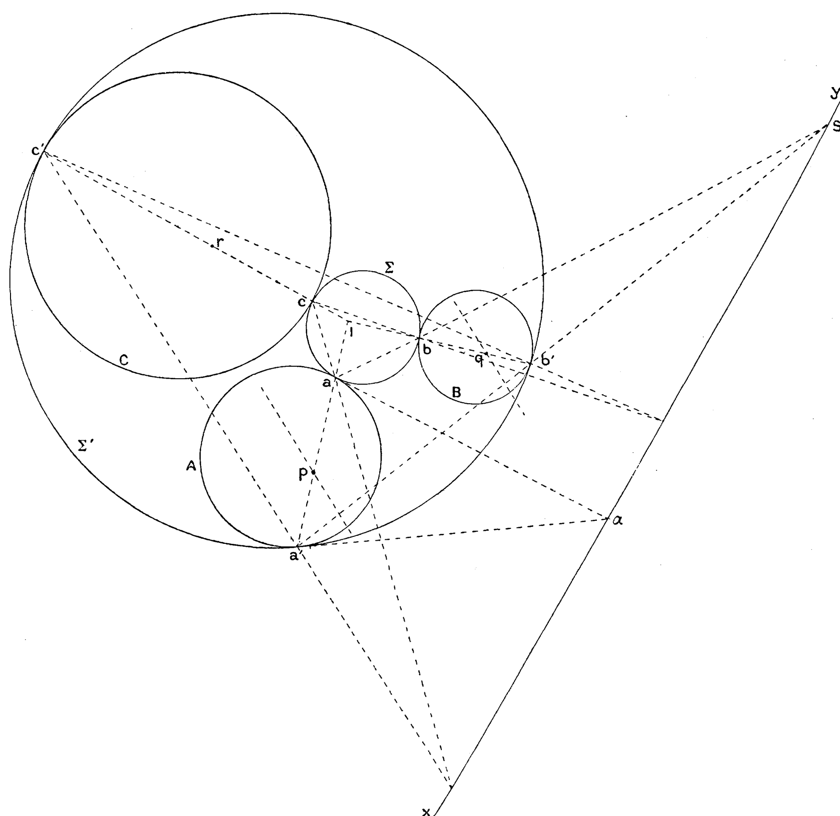


Fig. 194.

obtenus comme nous venons de le dire, sont antihomologues deux à deux dans les cercles donnés.

Cherchons, en effet, l'antihomologue, dans le cercle B, de la corde aa' du cercle A. Cette corde est déterminée (**224**) par la double condition que : 1° les deux cordes se coupent sur l'axe radical des cercles A, B ; 2° les points où elles rencontrent les polaires de S par rapport à leurs cercles respectifs soient homologues. Or : 1° le

point I, intersection de aa', bb', appartient bien à l'axe radical de A et de B; 2° les points p, q, pôles de xy par rapport à AB, sont sur les polaires de S par rapport à ces cercles; et ces points sont homologues, car, dans l'homothétie qui a pour centre S et qui permet de passer du cercle A au cercle B, la droite xy se correspond à elle-même, et par conséquent ses pôles se correspondent. La corde antihomologue de aa' est donc bb'. De même, les cordes cc', aa' sont antihomologues dans les cercles C, A et les cordes cc', bb' dans les cercles C, B.

Nous désignerons par b, c les deux antihomologues de a (sans qu'il soit encore prouvé que ces points soient antihomologues entre eux); b', c' sont alors les antihomologues de a'. Par les points a, b, c faisons passer un cercle Σ et par les points a', b', c', un cercle Σ'.

Ces deux cercles sont inverses l'un de l'autre par rapport au point I, puisque les points a, a'; b, b'; c, c' sont deux à deux inverses par rapport à ce point : le cercle inverse de abc ne peut donc être que le cercle $a'b'c'$.

L'axe radical de ces cercles est xy. Car cet axe radical doit passer, d'une part par l'intersection de ab, $a'b'$; d'autre part par celle de ac, $a'c'$.

Soit alors α_1 le point d'intersection des tangentes en a, a' à la circonférence A. Ce point est sur xy, puisque aa' passe par le point p; il est aussi sur la perpendiculaire au milieu de aa'.

Mais le point α, où se coupent les tangentes menées en a, a' aux cercles Σ, Σ' respectivement, est aussi sur xy, puisque cette droite est l'axe radical de Σ, Σ'; il est, par suite, aussi sur la perpendiculaire au milieu de aa', puisque les tangentes $\alpha_1 a$, $\alpha_1 a'$, menées respectivement aux cercles Σ, Σ', sont égales.

Donc *les points* α, α_1 *coïncident* et les cercles Σ, Σ' touchent A en a, a'. Ils touchent donc également B et C en b, b'; c, c' (**227**).

234. Nous avons cherché un cercle Σ ayant avec A, B, C des contacts de même espèce. On trouverait les cercles qui ont avec A, B, C des contacts d'espèces différentes en substituant, dans les considérations qui précèdent, les axes de similitude inverses à l'axe direct.

Comme il y a quatre axes de similitude, le problème des cercles tangents peut avoir huit solutions. Mais tout ou partie de ces solutions

peut manquer : c'est ce qui arrivera si la droite Ip, par exemple, ne coupe pas le cercle A. On voit que, si la puissance du point I par rapport aux trois cercles donnés est négative et, par conséquent, le point I intérieur à ces cercles, les huit solutions existent toutes. Elles existent également toutes si les circonférences données sont extérieures les unes des autres, ainsi qu'on le voit aisément en discutant le problème par la méthode du n° **231**.

235. La solution de Gergonne s'applique également lorsqu'un ou deux des cercles donnés sont remplacés par des points ou des droites, ainsi qu'on peut s'en rendre compte en reprenant, dans ces nouvelles conditions, les raisonnements du n° **232**. Toutefois, la construction ne s'applique qu'à la détermination des points de contact avec les cercles. En particulier, elle ne donne plus aucun résultat lorsque *tous* les cercles sont remplacés par des points ou des droites.

236. La solution de Gergonne est en défaut dans certains cas particuliers. Si, en effet, les cercles donnés ont leurs centres en ligne droite, le centre radical et les trois pôles de chaque axe de similitude sont rejetés à l'infini dans la direction perpendiculaire à cette droite. On pourra éviter cette disposition particulière en soumettant la figure à une inversion.

Réciproquement, trois cercles peuvent, en général, être transformés par une même inversion en trois cercles ayant leurs centres en ligne droite. Il suffira, pour cela, que la puissance commune du centre radical par rapport aux cercles donnés soit positive et que, par conséquent, il existe un cercle les coupant tous trois à angle droit. Si on prend comme pôle d'inversion un point quelconque de ce cercle, on transformera les circonférences données en trois autres qui sont coupées à angle droit par une même droite, c'est-à-dire qui ont leurs centres sur cette droite.

L'inconvénient que nous venons de constater disparaîtrait, par conséquent, si on arrivait à ne faire figurer dans la solution précédente que des propriétés qui ne changent pas par l'inversion, telles que contact de deux circonférences, angle de deux circonférences, etc. On peut, en effet, modifier, dans ce sens, la solution de Gergonne [1].

(1) Voir la note C à la fin du volume.

EXERCICES

258. Par deux points, faire passer un cercle qui coupe un cercle donné sous un angle donné.

259. Tracer un cercle orthogonal à deux cercles donnés et tangent à un troisième cercle donné.

Plus généralement, tracer un cercle orthogonal à deux cercles donnés et coupant un troisième cercle donné sous un angle donné.

260. Par deux points A, B, on mène deux cercles tangents à une même circonférence C et un troisième qui la coupe orthogonalement. Montrer que ce dernier cercle divise en deux parties égales l'angle des deux autres et que son centre est le point d'intersection de leurs tangentes communes (n° **229**).

261. Par un point A, on mène les deux cercles tangents (avec contacts de même espèce) à deux circonférences données, et un troisième qui coupe ces circonférences orthogonalement. Montrer que ce dernier cercle passe par le second point B commun aux deux premiers et possède les propriétés indiquées à l'exercice précédent.

262. Les deux cercles tangents ayant été tracés par le point A comme dans l'exercice précédent, soient P, Q leurs points de contact avec la première circonférence donnée, P', Q' leurs points de contact avec la seconde.

1° Les cercles APQ, AP'Q' sont tangents entre eux. Ils coupent orthogonalement le troisième cercle dont il est question dans l'exercice précédent ;

2° Les cercles, APQ, BPQ (B étant, comme dans l'exercice précédent, le second point commun aux cercles APP', AQQ') sont inverses l'un de l'autre par rapport à la première circonférence donnée, les cercles AP'Q', BP'Q' par rapport à la seconde circonférence.

3° Que deviennent ces énoncés lorsque les circonférences données sont remplacées par des droites ? Montrer qu'alors les quatre cercles APQ, AP'Q', BPQ, BP'Q' sont égaux entre eux.

263. Mener un cercle passant par un point donné et tangent à deux droites données, en traçant un cercle quelconque C tangent aux deux droites et remarquant que le cercle donné doit être homothétique de C, par rapport au point de concours O de celles-ci.

264. Tracer, par une méthode analogue, un cercle tangent à deux droites et à un cercle donné. (La droite qui joint O au point de contact coupe le cercle C et le cercle donné sous le même angle.)

265. Même problème, lorsque les deux droites sont remplacées par deux cercles concentriques. (On se servira du cercle concentrique aux deux donnés, mené par le point de contact du cercle cherché avec le troisième cercle donné.)

266. Deux cercles variables sont tangents chacun à deux circonférences fixes et, de plus, sont tangents entre eux. Lieu de leur point de contact. (La première méthode du n° **230** montre à quelle condition deux cercles tangents aux deux circonférences données peuvent avoir leurs points communs confondus.)

267. Les centres des huit cercles tangents à trois cercles donnés sont, deux à deux, sur les perpendiculaires abaissées du centre radical sur les quatre axes de similitude.

268. Par un point intérieur à un angle, mener une sécante formant avec les côtés de cet angle (non prolongés au delà du sommet) un triangle du plus petit périmètre possible. (Employer la méthode indirecte (ex. **174**) et l'ex. 90.)

CHAPITRE VII

PROPRIÉTÉS DU QUADRILATÈRE INSCRIT

237. Théorème de *Ptolémée*. — *Le produit des diagonales d'un quadrilatère inscrit au cercle est égal à la somme des produits des côtés opposés.*

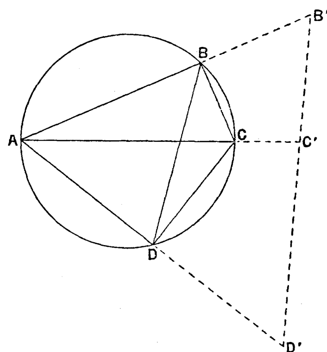


Fig. 195.

Soit le quadrilatère ABCD (*fig.* 195) inscrit dans un cercle. Transformons par inversion, en prenant pour pôle le point A. Le cercle ABCD se transformera en une droite qui passera par les points B', C', D', inverses de B, C, D. Si C est le sommet du quadrilatère donné opposé à A, les points B, D seront de côtés différents de AC et, par suite, aussi les points B', D' : le point C' sera donc entre B' et D' et l'on aura (en valeur absolue)

$$B'D' = B'C' + C'D'.$$

Mais on a (**218**), si k est la puissance d'inversion :

$$B'D' = DB \cdot \frac{k}{AB \cdot AD}, \quad B'C' = CB \cdot \frac{k}{AB \cdot AC}, \quad C'D' = DC \cdot \frac{k}{AC \cdot AD}.$$

En substituant ces valeurs, multipliant par AB·AC·AD et divisant par k, il vient bien :

$$AC \cdot BD = AD \cdot BC + AB \cdot CD.$$

C. Q. F. D.

237 *bis.* La propriété précédente est caractéristique du quadrilatère inscriptible. C'est ce qui résulte du théorème suivant :

Théorème. — *Dans un quadrilatère non inscriptible, le produit des diagonales est plus petit que la somme des produits des côtés opposés (et plus grand que leur différence).*

Soit le quadrilatère non inscriptible ABCD (*fig.* 195 *bis*). Si nous répétons sur ce quadrilatère la construction précédente, les points B′, C′, D′ ne seront plus en ligne droite et formeront un triangle.

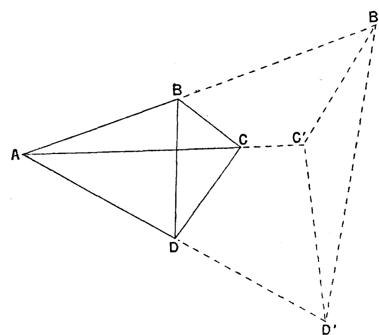


Fig. 195 *bis*.

Or les valeurs trouvées, au n° précédent, pour C′D, D′B′, B′C′ sont proportionnelles aux produits DC·AB, BD·AC, CB·AD. Donc l'un quelconque de ces produits est plus petit que la somme des deux autres.

238. La relation de Ptolémée est encore vraie et se démontre de la même façon lorsque les quatre points A, B, C, D, au lieu d'être sur un même cercle, sont en ligne droite et se suivent dans l'ordre A, B, C, D (*fig.* 196). Ainsi, *quand quatre points sont en ligne droite, le produit des segments qui empiètent l'un sur l'autre est égal à la somme des produits des segments qui n'empiètent pas.*



Fig. 196.

En tenant compte des signes, on a, quel que soit l'ordre des quatre points, la relation :

$$AB \cdot CD + AC \cdot DB + AD \cdot BC = 0.$$

C'est ce que l'on démontre en reprenant le raisonnement du n° **237** : les relations dont nous nous sommes servis sont, en effet, vraies en grandeur et signe (**218**, *Remarque*).

239. Problème. — *Connaissant les cordes* AB, AC (*fig.* 197) *de deux arcs appartenant à un cercle de rayon* R, *trouver la corde de l'arc égal à leur somme ou à leur différence.*

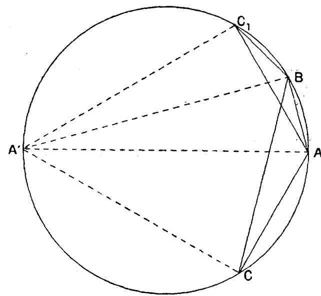


Fig. 197.

C'est le problème que nous avons eu à résoudre au nº **174** pour calculer les côtés des différents pentédécagones réguliers.

1º Soient les arcs AB, AC portés en sens contraire, de manière que l'arc BC en soit la somme. Menons le diamètre AA'. Nous aurons :

$$AA' = 2R\,;\ A'B = \sqrt{4R^2 - \overline{AB}^2}\,;\ A'C = \sqrt{4R^2 - \overline{AC}^2}.$$

Or le quadrilatère inscrit ABA'C donne

$$BC \cdot AA' = AB \cdot A'C + AC \cdot A'B,$$

relation où tout est connu, à l'exception de BC, et d'où l'on tire :

$$BC = \frac{AB\sqrt{4R^2 - \overline{AC}^2} + AC\cdot\sqrt{4R^2 - \overline{AB}^2}}{2R}.$$

2º Soient les arcs AB, AC_1, portés dans le même sens, de manière que l'arc BC_1 en soit la différence. Le quadrilatère inscrit $AA'BC_1$ donnera, cette fois,

$$A'B \cdot AC_1 = AB \cdot A'C_1 + AA' \cdot BC_1,$$

d'où l'on tire

$$BC_1 = \frac{A'B \cdot AC_1 - AB \cdot A'C_1}{AA'} = \frac{AC_1\sqrt{4R^2 - \overline{AB}^2} - AB\sqrt{4R^2 - \overline{AC_1}^2}}{2R}.$$

240. Théorème. — *Les diagonales d'un quadrilatère inscrit au cercle sont entre elles comme les sommes des produits des côtés qui aboutissent à leurs extrémités.*

Soit le quadrilatère inscrit ABCD (*fig.* 198), dont les diagonales se coupent en O.

Les triangles OAD, OBC sont semblables (**131**) et donnent :

$$\frac{OA}{OB} = \frac{AD}{BC} = \frac{OD}{OC},$$

ce qui peut s'écrire :

$$\frac{OA}{AB \cdot AD} = \frac{OB}{AB \cdot BC}$$
$$\frac{OC}{BC \cdot CD} = \frac{OD}{AD \cdot CD}$$

de même, les triangles semblables OAB, OCD donnent

$$\frac{OA}{OD} = \frac{AB}{CD}, \text{ ou } \frac{OA}{AB \cdot AD} = \frac{OD}{AD \cdot CD}$$

ce qui montre que les quatre rapports

$$\frac{OA}{AB \cdot AD}, \frac{OB}{AB \cdot BC}, \frac{OC}{BC \cdot CD}, \frac{OD}{CD \cdot DA}$$

sont égaux. En ajoutant terme à terme le premier et le troisième ainsi que le deuxième et le quatrième, il vient bien

$$\frac{AC}{AB \cdot AD + BC \cdot CD} = \frac{BD}{AB \cdot BC + CD \cdot AD}.$$

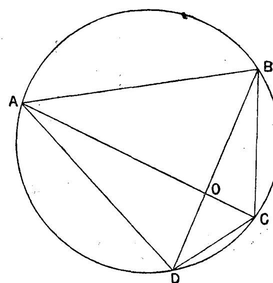


Fig. 198.

240 *bis. Autre démonstration.* — Soient AB $= a$, BC $= b$, CD $= c$, DA $= d$, les quatre côtés du quadrilatère. En changeant de toutes les façons possibles l'ordre de ces côtés, on obtient encore des quadrilatères inscrits au même cercle, car la somme des arcs qui ont pour cordes a, b, c, d, ne cesse pas d'être égale à la circonférence entière. Comme il est clair qu'on peut toujours prendre pour premier côté a, on a les permutations

$$a\,b\,c\,d, \quad a\,d\,c\,b,$$
$$a\,c\,d\,b, \quad a\,b\,d\,c,$$
$$a\,d\,b\,c, \quad a\,c\,b\,d.$$

Mais les deux permutations d'une même ligne horizontale donnent le même quadrilatère : par exemple, dans le quadrilatère ABCD (*fig.* 198 *bis*), l'ordre des côtés est a, b, c, d si on les lit dans le sens de la flèche ; a, d, c, b si on les lit en sens contraire. Il reste donc les

trois combinaisons $abcd$, $acdb$, $adbc$, auxquelles correspondent les trois quadrilatères ABCD, ABEF, ABGH (*fig.* 198 *bis*). L'arc BF

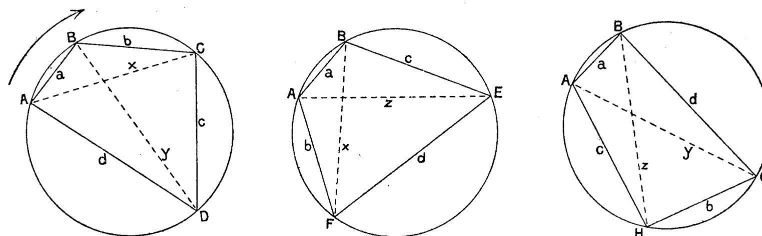


Fig. 198 *bis*.

étant égal à AC comme sommes d'arcs égaux ; et de même l'arc BH, à AE ; l'arc BD, à AG : les trois quadrilatères n'ont que trois diagonales distinctes : $AC = BF = x$, $BD = AG = y$, $AE = BH = z$; et l'application du théorème de Ptolémée aux quadrilatères ABEF, ABGH donne

$$xz = ad + bc, \quad yz = ab + cd$$

d'où, par division, $\dfrac{y}{x} = \dfrac{ab + cd}{ad + bc}$.

C. Q. F. D.

241. Problème. — *Calculer les diagonales x, y d'un quadrilatère inscrit dont les quatre côtés sont a, b, c, d.*

On connaît le produit

$$xy = ac + bd$$

et le rapport

$$\frac{x}{y} = \frac{ad + bc}{ab + cd}.$$

En multipliant ces deux égalités membre à membre, il vient

$$x^2 = \frac{(ac + bd)(ad + bc)}{ab + cd}$$

et en divisant membre à membre les mêmes égalités

$$y^2 = \frac{(ac + bd)(ab + cd)}{ad + bc}.$$

Problème. — *Connaissant les côtés a, b, c, d, d'un quadrilatère inscriptible, calculer le rayon du cercle circonscrit.*

Dans le triangle ABD (fig. 195 ou 198), le rayon R du cercle circonscrit est donné (**130, 130** *bis*) par la formule

$$R^2 = \frac{a^2d^2.\overline{BD}^2}{[(a+d)^2-\overline{BD}^2][\overline{BD}^2-(a-d)^2]}.$$

Remplaçons BD par la valeur que nous venons de trouver : nous aurons

$$(a+d)^2-\overline{BD}^2 = \frac{(a+d)^2(ad+bc)-(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}$$

$$= \frac{ad[(a+d)^2-(b-c)^2]}{ad+bc} = \frac{ad(a+d+b-c)(a+d+c-b)}{ad+bc}$$

$$\overline{BD}^2-(a-d)^2 = \frac{(ac+db)(ab+cd)-(a-d)^2(ad+bc)}{ad+bc}$$

$$= \frac{ad[(b+c^2)-(a-d)^2]}{ad+bc} = \frac{ad(b+c+a-d)(b+c+d-a)}{ad+bc}$$

Il vient donc

$$R^2 = \frac{(ac+bd)(ab+cd)(ad+bc)}{(b+c+d-a)(c+d+a-b)(d+b+a-c)(b+a+c-d)},$$

expression indépendante de l'ordre des côtés, conformément aux remarques faites plus haut (**240** *bis*). En désignant par p le demi-périmètre ($2p = a+b+c+d$), nous pouvons encore écrire

$$R^2 = \frac{(ac+bd)(ab+cd)(ad+bc)}{16(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}.$$

EXERCICES

269. Réciproque de l'énoncé de l'exercice 99 : si, dans le plan d'un triangle équilatéral ABC, on a un point M tel que MA = MB + MC, ce point appartient au cercle circonscrit.

Dans le cas contraire, on aurait MA < MB + MC.

270. Trouver une inversion qui transforme trois points donnés en trois autres formant un triangle égal à un triangle donné.

270 *bis*. Si l'on recommençait la démonstration du n° **238** en partant d'un sommet du quadrilatère ABCD autre que A, on obtiendrait un autre triangle analogue à B′C′D′.

1° Montrer que tous ces triangles sont semblables entre eux ;

2° Calculer les angles de l'un quelconque de ces triangles, connaissant les angles que font entre eux les côtés et les diagonales du quadrilatère donné ;

3° Montrer qu'on obtiendrait des triangles semblables aux précédents en abaissant,

de l'un quelconque des sommets A, B, C, D, des perpendiculaires sur les côtés du triangle formé par les trois autres ; ou encore, en joignant B et D entre eux et au troisième sommet d'un triangle semblable à ABC, avec le même sens de rotation, et dans lequel le côté homologue à AC serait AD ;

4° Montrer que la forme des triangles précédents est conservée, au sens de rotation près, si l'on soumet les quatre points A, B, C, D à une même inversion quelconque, c'est-à-dire qu'en opérant sur les points transformés comme on a opéré en 1°, 2°, ou 3° sur les points A, B, C, D, on obtiendra des triangles semblables aux premiers ;

5° Réciproquement, si deux quadrilatères ABCD, $A_1B_1C_1D_1$ sont tels, que les triangles déduits de chacun d'eux par les constructions précédentes soient semblables entre eux, il existe une inversion qui transforme les points A, B, C, D en quatre autres formant un quadrilatère égal à $A_1B_1C_1D_1$. — Déterminer cette inversion.

PROBLÈMES

PROPOSÉS SUR LES COMPLÉMENTS DU TROISIÈME LIVRE

271. Un losange ABCD est *articulé*, c'est-à-dire qu'il est susceptible de se déformer, de manière que les côtés gardent des longueurs constantes, mais que les angles varient. Deux sommets opposés, B et D, sont assujettis à rester à des distances constantes et égales d'un point fixe O.

Montrer que si l'on fait décrire au sommet A une certaine figure, le sommet C décrira une figure inverse de la première. (Losange de *Peaucelier*.)

271 *bis*. Plus généralement, la même conclusion subsiste si le quadrilatère articulé ABCD, sans être un losange, a ses côtés égaux entre eux deux à deux (AB = BC ; AD = DC) et que l'on ait en outre $\overline{OB}^2 - \overline{OD}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{AD}^2$.

272. L'axe radical et le centre de similitude divisent la droite qui joint deux points antihomologues quelconques dans un rapport anharmonique constant.

273. Le rapport anharmonique de quatre points d'une circonférence est égal au rapport anharmonique de leurs inverses sur la circonférence (ou la droite) inverse de la première.

274. Le rapport anharmonique de quatre points d'un cercle s'obtient en divisant entre eux les produits des côtés opposés du quadrilatère formé par ces points, ou l'un de ces produits par le produit des diagonales.

275. Quelles sont les inversions qui transforment deux cercles donnés en deux cercles égaux ?

Transformer trois cercles donnés en trois cercles égaux, par une même inversion.

275 *bis*. Étant données trois circonférences, si l'on trace les trois cercles Γ (n° **228**) relatifs à ces circonférences prises deux à deux et ayant pour centres trois centres de similitude situés sur un même axe, ces cercles ont même axe radical.

276. Quel est le lieu des pôles des inversions par lesquelles on peut transformer deux circonférences données en deux autres telles que la première divise la seconde en deux parties égales ; ou plus généralement, telle que la première intercepte sur la seconde un arc correspondant à un angle au centre de grandeur donnée ?

277. La ligne des centres de deux circonférences les coupe en A, B ; A′, B′ respectivement ; M étant un point du plan, les droites MA, MA′ coupent respectivement les circonférences correspondantes en C, C′. Montrer que si M se déplace sur une perpendiculaire à la ligne des centres, la circonférence MCC′ passe par deux points fixes. Lorsque la droite lieu du point M est l'axe radical, cette circonférence coupe orthogonalement les circonférences données et les deux points fixes sont les points limites de Poncelet.

278. Les segments interceptés par deux circonférences sur une droite quelconque sont vus, d'un des points limites, sous des angles ayant même bissectrice (ou des bissectrices perpendiculaires). — Cas où la sécante est tangente à l'une des circonférences.

279. Démontrer le théorème de Pascal (n° **196**) en formant trois circonférences qui, prises deux à deux, aient pour centres de similitude les points de rencontre des côtés opposés de l'hexagone. (Ces circonférences passent chacune par deux sommets opposés.)

280. Construire les cercles tangents à trois cercles donnés, en utilisant l'exercice 253.

281. Autour d'un point situé dans le plan d'un cercle, on fait pivoter un angle droit et, par les points où les côtés de cet angle rencontrent la circonférence, on mène des tangentes à la courbe. Lieu des sommets du quadrilatère ainsi formé. (Ligne inverse du lieu obtenu dans l'exercice 201.)

282. Un quadrilatère ABCD est circonscrit à une circonférence *o* et inscrit à une circonférence O. Soient *a*,*b*,*c*,*d* les points de contact des quatre côtés avec la circonférence *o*.

1° Le point P où concourent à la fois (ex. 239) les diagonales des quadrilatères ABCD, *abcd* est un point limite des circonférences *o*, O. (ex. 241, 2°.)

2° Les diagonales du quadrilatère *abcd* sont les bissectrices des angles formés par celles du quadrilatère ABCD (ex. 278).

3° La circonférence O est celle que l'on obtiendrait dans l'exercice précédent (ex. 281), en partant du cercle *o* et du point P.

4° Conclure de là qu'étant données deux circonférences, on ne peut pas, en général, inscrire à l'une un quadrilatère circonscrit à l'autre. Il faut, pour que ce problème soit possible, qu'il existe une certaine relation entre la distance des centres des circonférences données et les deux rayons. Mais si cette relation est vérifiée, il existe une infinité de quadrilatères répondant à la question.

283. Quand un triangle a un angle obtus, il existe un cercle (et un seul) par rapport auquel chaque sommet de ce triangle est le pôle du côté opposé. Le centre de ce cercle est le point de concours des hauteurs du triangle.

On dit que ce cercle et le triangle sont *conjugués* l'un à l'autre.

284. Pour qu'il existe un triangle inscrit dans un cercle donné et conjugué à un autre cercle donné, il faut que le carré du rayon du second cercle soit la moitié de la puissance de son centre par rapport au premier cercle. Si cette condition est vérifiée, il existe non pas un, mais une infinité de triangles possédant la double propriété demandée. (Utiliser ex. 70.)

285. Étant données trois circonférences qui se coupent deux à deux, on considère le triangle curviligne qui a pour côtés trois arcs empruntés respectivement à ces trois circonférences et pour sommets trois points d'intersection de ces circonférences deux à deux, ce triangle étant tel qu'il ne contienne sur son périmètre aucun autre point d'intersection. Montrer que la somme des angles intérieurs de ce triangle est inférieure ou supérieure à deux droits, suivant qu'il existe ou non un cercle coupant les trois circonférences données à angle droit [1].

286. La condition nécessaire et suffisante pour qu'un quadrilatère soit inscriptible étant que les points B′, C′, D′ (nº **237**), inverses de trois sommets B, C, D par rapport au quatrième sommet A, soient en ligne droite, on peut déduire de cette dernière circonstance toutes les propriétés du quadrilatère inscriptible.

En déduire, en particulier, le théorème sur le rapport des diagonales. (Application du théorème de Stewart, nº **127**.)

(1) Voir note A, nº **290**.

LIVRE IV

DES AIRES

CHAPITRE PREMIER

MESURE DES AIRES

242. Deux polygones sont *adjacents* (*fig.* 199, 200) s'ils ont un ou

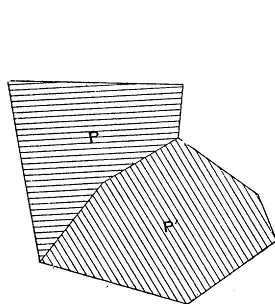


Fig. 199.

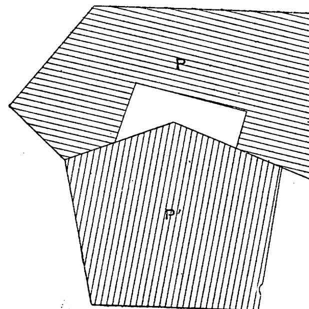


Fig. 200.

plusieurs côtés, ou portion de côtés (*fig.* 200) communs, sans avoir en commun aucun point intérieur.

Étant donnés deux polygones adjacents P, P′, si l'on supprime les côtés communs, on forme (1) un troisième polygone P″ qui est dit la

(1) Nous renonçons, dans le IVe livre, à la restriction formulée au no **20** (liv. I) relativement au sens du mot *polygone*. La portion de plan ombrée dans la figure 19 (no **20**) sera donc traitée, dans ce livre, comme un polygone. D'ailleurs on peut trouver un tel polygone en faisant la somme de deux polygones ordinaires adjacents, ainsi que le montre la figure 200.

somme des deux premiers. L'intérieur de ce polygone comprend tout point situé à l'intérieur d'un des deux polygones primitifs, et seulement de tels points.

243. Définir les aires des polygones plans, c'est faire correspondre à chaque polygone plan une grandeur (dite *surface* ou *aire* du polygone) possédant les propriétés suivantes.

I. — *Deux polygones égaux ont la même aire, quelles que soient leurs situations dans l'espace ;*

II. — *Le polygone* P'', *somme de deux polygones adjacents* P, P', *a pour aire la somme des aires de* P *et* P'.

Nous admettrons qu'on peut établir une pareille correspondance [1].

244. Les aires peuvent être définies d'une infinité de manières différentes ; car si, à chaque polygone plan, on a fait correspondre une grandeur possédant les propriétés I et II, une grandeur proportionnelle à la première les possédera également.

Pour *mesurer* les aires, comme nous allons apprendre à le faire, il faut commencer par désigner un certain polygone dont l'aire sera prise pour *unité* d'aire ; la *mesure* d'une aire quelconque sera alors le rapport de cette aire à l'unité.

Nous convenons, ici et dans tout ce qui va suivre, de prendre, pour unité d'aire, l'aire du carré qui a pour côté l'unité de longueur. Les théorèmes que nous allons énoncer supposeront cette convention, sans que nous ayons besoin de la formuler à propos de chacun d'eux.

245. Deux polygones qui ont même aire sont dits *équivalents*. Deux polygones égaux sont donc équivalents. Bien entendu, la réciproque n'est pas vraie : deux polygones équivalents ne sont pas nécessairement égaux pour cette seule raison. Par exemple, nous montrerons qu'on peut construire un carré équivalent à un polygone donné quelconque.

246. On nomme *base* d'un rectangle l'un des côtés. La longueur d'un côté perpendiculaire au premier est alors dite la *hauteur* du

(1) Cette supposition est, en réalité, superflue, le fait pouvant se démontrer. (Voir la note D à la fin du volume.)

rectangle. La base et la hauteur d'un rectangle en sont dites les deux *dimensions*.

Plus généralement, on nomme *base* d'un parallélogramme un côté quelconque : la *hauteur* est alors la distance de ce côté au côté opposé (mesurée, bien entendu, sur une perpendiculaire commune).

De même, les *bases* d'un trapèze étant les côtés parallèles, la *hauteur* est la distance de ces parallèles.

Enfin, on nomme *base* d'un triangle un côté quelconque, la *hauteur* étant la perpendiculaire abaissée, sur ce côté, du sommet opposé.

247. Théorème. — *Les aires de deux rectangles qui ont même base sont entre elles comme leurs hauteurs.*

En effet :

1° Deux rectangles qui ont même base et même hauteur sont égaux et, par suite, équivalents, d'après la propriété I.

2° Si trois rectangles ABCD, A'B'C'D', A''B''C''D'' (*fig.* 201) ont

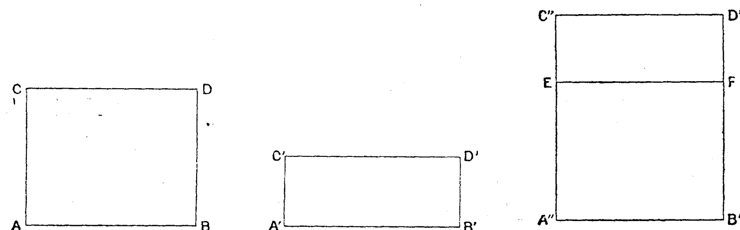


Fig. 201.

même base, mais que la hauteur du troisième soit la somme des hauteurs des deux premiers, l'aire du troisième sera la somme des aires des deux premiers (propriété II). Car ce troisième pourra être considéré comme la somme de deux rectangles A''B''EF, C''D''EF égaux respectivement aux premiers.

Dès lors on prouvera, comme au n° **113** (liv. III) ou au n° **70** (liv. II), et comme il a été expliqué en arithmétique [1], que la valeur à $\frac{1}{n}$ près du rapport des deux aires est égale à la valeur à $\frac{1}{n}$ près du rapport des deux hauteurs : ce qui démontre le théorème.

(1) *Leçons d'Arithmétique*, chap. XIII, n° 493.

Corollaire. — Un côté quelconque d'un rectangle pouvant être pris, soit comme base, soit comme hauteur, nous aurions pu dire des bases ce que nous avons dit des hauteurs, et réciproquement. En un mot, *deux rectangles qui ont une dimension commune sont entre eux comme les dimensions non communes.*

Théorème. — *Le rapport des aires de deux rectangles est égal au produit des rapports des dimensions homologues.*

En effet, nous venons de voir que l'aire d'un rectangle est proportionnelle à sa base et à sa hauteur, lorsque celles-ci varient séparément. Elle est donc proportionnelle à leur produit.

On peut d'ailleurs répéter ici le raisonnement présenté, à cet égard, en arithmétique. Soient, à cet effet, A, A′ les aires des deux rectangles donnés; a, b les dimensions de l'un, a', b' les dimensions de l'autre. On considérera le rectangle qui a pour dimensions a' et b. Si A″ est l'aire de ce rectangle, on aura

$$\frac{A}{A''} = \frac{a}{a'},$$
$$\frac{A''}{A'} = \frac{b}{b'}.$$

Dans ces égalités, nous pouvons supposer que A, A′, A″ désignent non pas les aires elles-mêmes, mais les nombres qui mesurent ces aires relativement à une même unité : par exemple, celle que nous avons choisie, le carré construit sur l'unité de longueur. Dans ces conditions, si nous multiplions membre à membre les deux égalités précédentes, le produit $\frac{A}{A''} \cdot \frac{A''}{A'}$ pourra s'écrire $\frac{AA''}{A''A'} = \frac{A}{A'}$. Ce rapport $\frac{A}{A'}$ est donc bien égal au produit des rapports $\frac{a}{a'}$ et $\frac{b}{b'}$.

Théorème. — *L'aire d'un rectangle est égale au produit de ses deux dimensions.*

Ce théorème n'est en effet que le précédent, appliqué au rectangle donné et au carré construit sur l'unité de longueur. L'aire A′ de ce dernier est l'unité d'aire et ses dimensions a', b' sont égales à l'unité de longueur, de sorte que le rapport $\frac{A}{A'}$ n'est autre que la mesure de l'aire A, et les rapports $\frac{a}{a'}$, $\frac{b}{b'}$, que les mesures des longueurs a, b.

Remarque. — Rappelons :

1° Que cet énoncé n'a de sens que moyennant la convention formulée au n° **69** (livre II) et rappelée au n° **106** (livre III). Le sens de cet énoncé est : *le* **nombre** *qui mesure l'aire d'un rectangle est égal au produit des* **nombres** *qui mesurent respectivement sa base et sa hauteur.*

2° Qu'il n'est exact que moyennant la convention formulée au n° **224** et qui est, par conséquent, essentiellement supposée ici. Il est évident *à priori* que l'égalité énoncée n'a pas lieu si l'unité de longueur et l'unité d'aire ont été prises quelconques, indépendamment l'une de l'autre.

On voit, d'après cela, que l'on peut choisir l'unité de longueur d'une façon arbitraire ; mais que, ce choix une fois fait, celui de l'unité d'aire en dérive nécessairement. Aussi dit-on que l'unité d'aire est une unité *dérivée*.

248. Théorème. — *L'aire d'un parallélogramme a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur.*

Soit le parallélogramme ABCD (*fig.* 202). Menons les perpendiculaires en A et B au côté AB, jusqu'à rencontre en *c* et *d* avec la droite CD, de manière à former le rectangle AB*cd*. Ce rectangle est équivalent au parallélogramme ; car, en ajoutant respectivement à ces deux polygones les deux triangles rectangles B*d*D, A*c*C, qui sont égaux comme étant équiangles et ayant un côté égal, on obtient la même somme, à savoir l'aire du trapèze AcBD. Le rectangle ayant pour dimensions la base du parallélogramme et sa hauteur, le théorème est démontré.

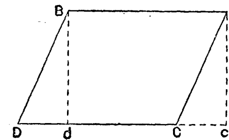


Fig. 202.

249. Théorème. — *L'aire d'un triangle a pour mesure le demi-produit de la base par la hauteur.*

Soit le triangle ABC (*fig.* 203). Par le point A, menons la parallèle AD à BC, et par le point C la parallèle CD à AB. Nous formons ainsi le parallélogramme ABCD, qui a même base et même hauteur que le triangle. Or, ce parallélogramme est divisé en deux triangles égaux, ABC, ADC, par sa diagonale AC (**46**). Donc le triangle ABC est la moitié du parallélogramme.

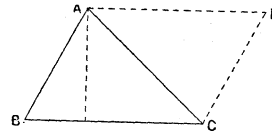


Fig. 203.

250. Corollaire. — *Le lieu des sommets* C *des triangles qui ont même base* AB (*fig.* 204) *et même surface, se compose de deux parallèles à* AB.

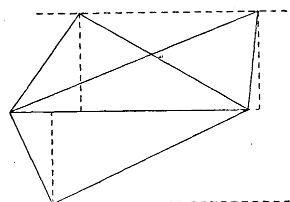


Fig. 204.

Car les sommets en question sont les points situés à une distance constante de AB.

251. Problème. — *Calculer l'aire d'un triangle dont on donne les trois côtés.*

Nous avons vu (**130**) que, si on désigne par a, b, c les côtés du triangle et par p le demi-périmètre, donné par l'égalité

$$a + b + c = 2p,$$

la hauteur AH correspondant au côté a est

$$\mathrm{AH} = \sqrt{\frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{a^2}} = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Donc la surface S du triangle est

$$\mathrm{S} = \frac{a \cdot \mathrm{AH}}{2} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$
$$= \frac{1}{4}\sqrt{2b^2c^2 + 2c^2a^2 + 2a^2b^2 - a^4 - b^4 - c^4}.$$

Remarque. — *Le produit des trois côtés d'un triangle est égal à quatre fois le produit de la surface par le rayon du cercle circonscrit.*

Dans le triangle ABC, où AH est la hauteur issue de A et R le rayon du cercle circonscrit, on a (**130** *bis*)

$$\mathrm{AB} \cdot \mathrm{AC} = 2\mathrm{R} \cdot \mathrm{AH};$$

en multipliant les deux membres par BC, il vient

$$\mathrm{AB} \cdot \mathrm{AC} \cdot \mathrm{BC} = 2\mathrm{R} \cdot \mathrm{AH} \cdot \mathrm{BC} = 4\mathrm{RS}.$$

252. Aire d'un polygone. — On trouve l'aire d'un polygone quelconque en le décomposant en triangles, dont on ajoute entre elles les aires.

Les deux théorèmes suivants ne sont que des applications de cette manière d'opérer.

Théorème. — *L'aire d'un trapèze a pour mesure le produit de la demi-somme des bases par la hauteur.*

Soit le trapèze ABCD (*fig.* 205). Nous décomposerons ce trapèze, par la diagonale AD, en deux triangles ABD, ACD, que nous considérerons comme ayant pour bases respectives AB, CD. Les deux hauteurs DD′, AA′ seront alors égales entre elles et à la hauteur h du trapèze. On aura donc

$$\text{Aire ABCD} = h \cdot \frac{\text{AB}}{2} + h \cdot \frac{\text{CD}}{2} = \frac{h\,(\text{AB} + \text{CD})}{2}.$$

252 *bis*. **Corollaire.** — *L'aire d'un trapèze a pour mesure le produit de sa hauteur par la droite qui joint les milieux des côtés non parallèles.*

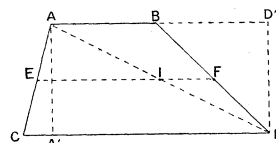


Fig. 205.

Car les milieux E, F des côtés AC, BD (*fig.* 205) et le milieu I de la diagonale AD sont sur une même parallèle aux bases, et le segment EF est égal à la demi-somme de ces bases, ses deux parties EI, IF étant respectivement égales à $\frac{\text{CD}}{2}$, $\frac{\text{AB}}{2}$.

253. Théorème. — *L'aire d'un polygone régulier a pour mesure le produit du périmètre par la moitié de l'apothème.*

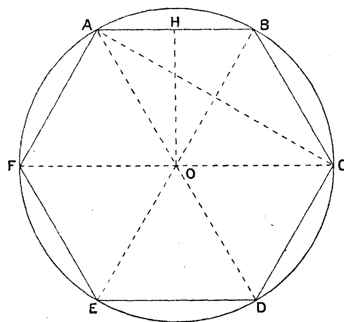


Fig. 206.

En effet, le polygone régulier ABCDEF (*fig.* 206) est décomposé, par

les rayons qui aboutissent à ses sommets, en triangles OAB, OBC ..., tous égaux et qui ont par conséquent une même hauteur, égale à l'apothème OH du polygone. On a donc :

$$\text{Aire OAB} = \text{OH}\,\frac{\text{AB}}{2}$$
$$\text{Aire OBC} = \text{OH}\,\frac{\text{BC}}{2}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\text{Aire OFA} = \text{OH}\cdot\frac{\text{FA}}{2}.$$

et, en ajoutant,

$$\text{Aire ABCDEF} = \frac{\text{OH}\,(\text{AB} + \text{BC} + \ldots + \text{FA})}{2}.$$

C. Q. F. D.

REMARQUE. — *Si le nombre des côtés du polygone est pair, son aire est égale à la moitié du rayon, multipliée par le périmètre du polygone obtenu en joignant les sommets de deux à deux.*

Car le triangle OAB (*fig.* 206) est encore égal au demi-produit de OB par la hauteur AI abaissée du point A, et qui est la moitié de AC.

253 *bis.* On nomme *secteur polygonal* (*fig.* 207) un polygone limité par une ligne brisée inscriptible dans un cercle et les rayons du cercle circonscrit qui aboutissent à ses extrémités.

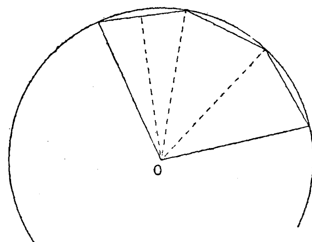


FIG. 207.

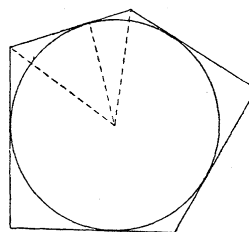
Le secteur polygonal est dit *régulier* si la ligne brisée qui lui sert de base est régulière.

Théorème. — *L'aire d'un secteur polygonal régulier a pour mesure le produit du périmètre de la ligne brisée qui lui sert de base par la moitié de l'apothème.*

La démonstration de ce théorème est exactement pareille à celle du précédent.

254. Théorème. — *L'aire d'un polygone convexe circonscrit à un*

cercle (et comprenant ce cercle à son intérieur) (fig. 208) *est égale au produit de son périmètre par la moitié du rayon du cercle inscrit.*


Fig. 208.

Car on peut décomposer le polygone en triangles ayant pour sommet commun le centre du cercle. Ces triangles, qui ont pour bases les différents côtés, ont pour hauteur commune le rayon du cercle.

255. Problème. — *Trouver l'aire d'un quadrilatère inscriptible, connaissant les quatre côtés.*

Soit le quadrilatère inscrit ABCD, dans lequel on a $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$. Si R est le rayon du cercle circonscrit, on a (**251**, *Remarque*)

$$a \cdot b \cdot \overline{AC} = 4R \times \text{aire ABC},$$
$$c \cdot d \cdot \overline{AC} = 4R \times \text{aire ACD}.$$

La somme des surfaces ABC, ACD est égale à l'aire cherchée S. Il vient donc, en ajoutant

$$4RS = \overline{AC}\,(ab + cd) = \sqrt{(ac + bd)\,(ad + bc)\,(ab + cd)}\,;$$

et, en remplaçant R par sa valeur (**241**),

$$S = \sqrt{(p-a)\,(p-b)\,(p-c)\,(p-d)}.$$

Remarque. — Le résultat est indépendant de l'ordre des côtés, ce qui était évident *à priori;* car les quadrilatères ABCD, ABEF, ABGH (n° **240** *bis*) sont équivalents, comme composés de triangles égaux deux à deux.

EXERCICES

287. Trouver la surface du triangle équilatéral de côté a.

288. Quel est le côté du triangle équilatéral dont la surface est 1^{mq}?

289. Le périmètre d'un carré étant parcouru dans un sens déterminé, on joint chaque sommet au milieu du côté qui précède le sommet opposé. Les droites ainsi obtenues sont les côtés d'un nouveau carré, qui est la cinquième partie du premier.

290. Par un point pris sur une diagonale AC d'un parallélogramme ABCD, on mène des parallèles aux côtés. On divise ainsi le parallélogramme donné en quatre parallélogrammes partiels, dont deux ont une diagonale dirigée suivant AC. Montrer que les deux autres sont équivalents entre eux.

291. Parmi les triangles qui ont même base et même angle au sommet, quel est le plus grand ?

292. Dans tout trapèze, les deux triangles, formés respectivement par chacun des

deux côtés non parallèles avec les deux diagonales, sont équivalents entre eux. — Réciproque.

293. Par le milieu de chaque diagonale d'un quadrilatère, on mène une parallèle à l'autre diagonale, et l'on joint le point où se coupent les deux droites ainsi menées aux milieux des quatre côtés. Montrer que le quadrilatère est ainsi divisé en quatre parties équivalentes.

294. Par chaque sommet d'un quadrilatère, ou même une parallèle à la diagonale qui ne passe pas par ce sommet. Montrer que le parallélogramme ainsi formé est double du quadrilatère.

Deux quadrilatères dont les diagonales sont égales chacune à chacune et se coupent sous le même angle, sont équivalents.

295. Trouver, dans l'intérieur d'un triangle, un point tel qu'en le joignant aux trois sommets, on divise le triangle en trois parties équivalentes; ou, plus généralement, en trois parties proportionnelles à des longueurs ou à des nombres donnés.

295 *bis*. Montrer, par des considérations de surface (ex. précédent) qu'en joignant un point aux trois sommets d'un triangle, les droites de jonction divisent ces côtés opposés dans des rapports dont le produit est égal à 1. (Théorème démontré au n° **197**.)

296. On joint un point quelconque O d'un plan aux sommets d'un parallélogramme ABCD (AC, BD étant les diagonales de celui-ci) :

1° Si le point O est intérieur au parallélogramme, la somme des triangles opposés OAB, OCD équivaut à la somme des deux autres OBC, ODA;

2° Quel que soit le point O, le triangle OAC équivaut à la somme ou à la différence des triangles OAB, OAD.

297. L'aire d'un trapèze a pour mesure le produit d'un des côtés non parallèles par la perpendiculaire abaissée du milieu de l'autre sur le premier. Démontrer cette proposition : 1° en mettant sous une autre forme l'expression donnée n° **252** *bis;* 2° en montrant directement que le trapèze est équivalent au parallélogramme qui a la base et la hauteur ci-dessus indiquées.

Si l'on joint le milieu d'un des côtés non parallèles d'un trapèze aux extrémités du côté opposé, on obtient un triangle équivalent à la moitié du trapèze.

298. La somme des distances d'un point quelconque pris à l'intérieur d'un polygone régulier à tous les côtés est constante.

299. L'aire d'un triangle est égale au produit du demi-périmètre par le rayon du cercle inscrit.

L'aire d'un triangle est égale au produit du rayon d'un cercle ex-inscrit par la différence entre le côté correspondant et le demi-périmètre (ou par la demi-différence entre le côté correspondant et la somme des deux autres côtés).

300. L'inverse du rayon du cercle inscrit à un triangle est égal à la somme des inverses des rayons des cercles ex-inscrits.

301. Si x, y, z désignent les distances d'un point intérieur à un triangle aux trois côtés; h, k, l les hauteurs correspondantes, on a :

$$\frac{x}{h}+\frac{y}{k}+\frac{z}{l}=1.$$

Que devient cet énoncé lorsque le point est extérieur?

CHAPITRE II

COMPARAISON DES AIRES

256. Théorème. — *Deux triangles qui ont un angle égal (ou supplémentaire) sont entre eux comme les produits des côtés qui comprennent cet angle.*

Nous pouvons faire coïncider les angles égaux ou rendre adjacents les angles supplémentaires. Les deux triangles seront alors ABC, AB'C', les côtés AC, AC' coïncidant en direction et les côtés AB,

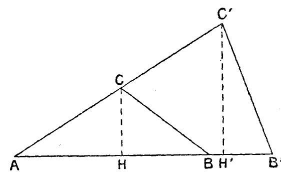


Fig. 209.

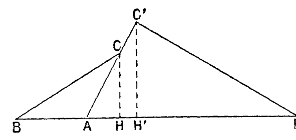


Fig. 210.

AB' étant également confondus en direction (*fig.* 209) ou se prolongeant l'un l'autre (*fig.* 210).

Le rapport des deux triangles sera égal au rapport des bases AB, AB', multiplié par le rapport des hauteurs CH, C'H', et ce dernier rapport est évidemment égal à $\frac{AC}{AC'}$.

C. Q. F. D.

257. Théorème. — *Le rapport des aires de deux polygones semblables est égal au carré du rapport de similitude.*

Nous distinguerons deux cas.

1° S'il s'agit de deux triangles semblables ABC, A'B'C', il suffit de remarquer que ces deux triangles ont l'angle $\widehat{A} = \widehat{A'}$. Le rapport

des aires est donc égal au produit des rapports $\frac{AB}{A'B'}$ et $\frac{AC}{A'C'}$, c'est-à-dire au carré de l'un d'eux, puisque ces rapports sont égaux entre eux.

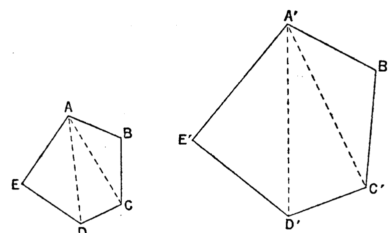


Fig. 211.

2° Soient maintenant deux polygones semblables quelconques ABCDE, A'B'C'D'E' (*fig.* 211), le rapport de similitude étant k.

Ces polygones pourront être décomposés en triangles semblables et semblablement disposés ABC, ACD, ADE; A'B'C', A'C'D', A'D'E', et nous aurons (1°)

$$\frac{ABC}{A'B'C'} = \frac{ACD}{A'C'D'} = \frac{ADE}{A'D'E'} = k^2.$$

En faisant la somme des numérateurs et celle des dénominateurs, il viendra bien

$$\frac{ABCDE}{A'B'C'D'E'} = k^2.$$

C. Q. F. D.

258. Théorème. — *Le carré construit sur l'hypoténuse d'un triangle rectangle est équivalent à la somme des carrés construits sur les côtés de l'angle droit.*

Soit le triangle rectangle ABC (*fig.* 212). Sur les côtés de l'angle droit AB, AC et sur l'hypoténuse BC, décrivons, extérieurement au triangle, les carrés ABEF, ACGH, BCIJ.

Du sommet A, abaissons sur BC la perpendiculaire AD qui, prolongée, vient couper IJ en K. Je dis que le rectangle BDIK est équivalent au carré ABEF.

Pour le démontrer, joignons AI et CE. Le triangle ABI a même base BI et même hauteur AL = BD que le rectangle BDIK : il est donc équivalent à la moitié de ce rectangle. De même, le triangle EBC a même base BE et même hauteur CM = AB que le carré ABEF; il est donc équivalent à la moitié de ce carré. Or les deux triangles ABI, EBC sont égaux, comme ayant un angle en A égal

(l'angle $\widehat{A}$ du triangle augmenté d'un angle droit) compris entre côtés égaux chacun à chacun (AB = BE et BI = BC). Donc le rectangle BDIK est bien équivalent au carré ABEF.

On verrait de même que le rectangle CDKJ est équivalent au carré

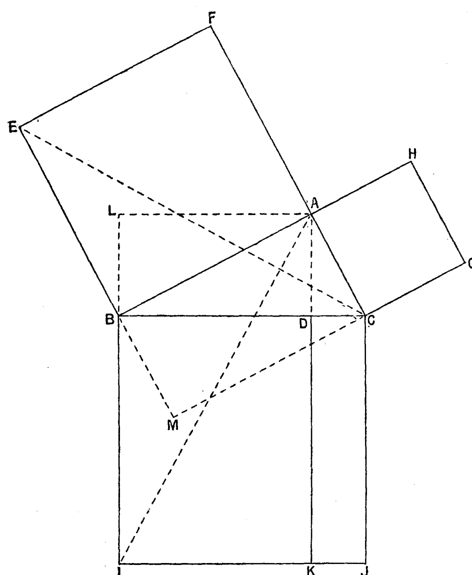


Fig. 212.

ACHG. Le carré BCIJ, somme des deux rectangles, est donc bien équivalent à la somme des deux carrés.

Remarque. — Ce théorème revient, au fond, à celui que nous avons démontré au nº **124**; car les carrés ABEF, ACGH, BCIJ ont respectivement pour mesures les carrés des nombres qui mesurent les côtés. La démonstration suit d'ailleurs la même marche; car l'équivalence du rectangle BDIK et du carré ABEF exprime la même chose que l'égalité $\overline{AB}^2 = BC \cdot BD$, dont nous nous sommes servis en cet endroit.

EXERCICES

302. On divise les trois côtés d'un triangle dans des rapports donnés. Trouver le rapport de l'aire du triangle qui a pour sommets les points de division à celle du triangle primitif. Examiner le cas où une ou plusieurs des divisions sont extérieures. En déduire une démonstration des théorèmes des nºs **192-193**.

303. Partager un triangle en parties équivalentes par des parallèles à la base.

304. Partager un trapèze en parties équivalentes par des parallèles aux bases.

305. On prolonge les rayons qui vont au sommet du triangle équilatéral inscrit à un cercle jusqu'à rencontre avec la circonférence qui passe par les sommets du carré circonscrit. Les nouveaux points ainsi obtenus forment un triangle équivalent à l'hexagone inscrit.

306. Par chacun des sommets d'un quadrilatère, on mène une parallèle à une même direction quelconque, jusqu'à rencontre avec la diagonale qui ne passe pas par ce sommet. — Prouver :

1° Que le quadrilatère qui a pour sommets ces points de rencontre est équivalent au premier ;

2° Qu'il est un trapèze ou un parallélogramme en même temps que le premier. — Plus généralement, les rapports dans lesquels les côtés opposés prolongés se divisent réciproquement, sont les mêmes dans les deux quadrilatères.

307. Étant donnés, dans un plan, des polygones quelconques, ou même, par chacun de leurs sommets, une parallèle à une direction déterminée, sur laquelle on prend une longueur proportionnelle à la distance de ce sommet à une droite fixe (dans un sens qui dépend du sens de la distance en question).

Montrer que les polygones qui ont pour sommets les extrémités des segments ainsi construits ont leurs aires proportionnelles à celles des polygones primitifs (ex. 297).

Dans quels cas les nouveaux polygones sont-ils équivalents aux anciens ?

308. Montrer que l'exercice précédent comprend comme cas particulier l'exercice 306 (utiliser ex. 129).

AUTRES DÉMONSTRATIONS DU THÉORÈME DU CARRÉ DE L'HYPOTÉNUSE

309. Dans l'exercice 43 (Ier livre), prouver que le troisième carré HBKF est équivalent à la somme des deux carrés donnés. En déduire le théorème du n° **258**.

310. Démontrer le théorème du carré de l'hypoténuse à l'aide du théorème du n° **257**, en remarquant que le triangle rectangle est la somme des deux triangles partiels dans lesquels il est partagé par sa hauteur.

311. Sur les côtés AB, AC d'un triangle quelconque, comme bases respectives, on construit les deux parallélogrammes ABEF, ACGH extérieurs au triangle, mais quelconques d'ailleurs, et on prolonge les côtés EF, GH jusqu'à leur rencontre en M. Montrer que le parallélogramme qui a pour côtés BC et une droite égale et parallèle à AM équivaut à la somme des deux premiers.

Montrer que le théorème précédent comprend comme cas particulier le théorème du carré de l'hypoténuse.

CHAPITRE III

AIRE DU CERCLE

259. On nomme *aire d'un cercle* la limite vers laquelle tend l'aire d'un polygone inscrit ou circonscrit dont tous les côtés tendent vers zéro.

Pour démontrer que cette limite existe et est indépendante de la loi suivant laquelle les côtés tendent vers zéro, on suit une marche toute semblable à celle qui a été suivie pour la longueur de la circonférence.

On commence par considérer des polygones réguliers inscrits dont le nombre de côtés double indéfiniment et les polygones circonscrits correspondants (*fig*. 168). Dans ces conditions :

Les surfaces des polygones inscrits vont en croissant; car chacun d'eux comprend le précédent à son intérieur. D'ailleurs chacune de ces surfaces est moindre que celle d'un polygone circonscrit quelconque.

Donc *ces surfaces tendent vers une limite*.

De même, *les surfaces des polygones circonscrits vont en décroissant*, puisque chacun d'eux est intérieur au précédent. D'ailleurs chacune de ces surfaces est supérieure à celle d'un polygone inscrit quelconque.

Donc *les surfaces des polygones circonscrits tendent toutes également vers une limite*.

Ces deux limites sont égales. Car le rapport des surfaces d'un polygone inscrit et du polygone circonscrit correspondant est égal au carré du rapport de similitude, lequel tend vers un (**176**).

260. Soit S la valeur commune de ces limites, obtenue en partant du carré, par exemple, et considérant successivement les polygones réguliers de 4, 8, 16, 32, ..., 2^n... côtés. Prenons

maintenant des polygones inscrits *quelconques* $a'\,b'\,c'$... (*fig.* 169) et les polygones circonscrits correspondants A′B′..., en imposant la seule condition que le nombre des côtés de ces polygones augmente indéfiniment, de manière que *tous* les côtés tendent vers zéro.

La surface d'un polygone inscrit $a'\,b'\,c'$... *est plus petite que* S. Car S est la limite des polygones circonscrits, tous plus grands que A′B′...

S, étant compris entre le polygone inscrit et le polygone circonscrit, diffère de chacun d'eux moins qu'ils ne diffèrent entre eux.

Or *cette différence tend vers zéro.* Elle se compose en effet de la somme des triangles $a'b'A'$, $b'c'B'$, ... ; elle a donc pour mesure :

$$\frac{1}{2}(a'b'\cdot A'H + b'c'\cdot B'K + \ldots) < \frac{1}{2}(a'b' + b'c' + \ldots.)\, l$$

où A′H, B′K... (*fig.* 169) sont les hauteurs des triangles $a'b'A'$, $b'c'B'$, etc., et l désigne la plus grande de ces hauteurs.

Le facteur $a'b' + b'c' + \ldots$ tend, comme nous le savons, vers la longueur de la circonférence. Quant aux hauteurs A′H, B′K..., elles tendent toutes vers zéro. Car les longueurs OH, OA′, par exemple, tendent toutes deux vers le rayon du cercle et, par conséquent, leur différence A′H a pour limite zéro.

Donc le théorème est démontré : *les aires des polygones inscrits et circonscrits tendent toutes vers une limite unique* S, qui est l'aire du cercle [1].

261. Théorème. — *L'aire du cercle a pour mesure la longueur de la circonférence, multipliée par la moitié du rayon.*

Car l'aire d'un polygone régulier a pour mesure le produit du périmètre par la moitié de l'apothème. Lorsque le nombre des côtés augmente indéfiniment, le périmètre tend vers la longueur de la circonférence, l'apothème vers le rayon.

---

(1) Le raisonnement s'étend à des courbes convexes quelconques, moyennant la condition que la hauteur abaissée du point c, dans le triangle abc (note 1 du n° **179**), tende vers zéro avec la distance ab, et cela indépendamment de la position de l'arc ab sur la courbe donnée : condition qui est remplie en même temps que la condition analogue indiquée dans la note du n° **179**. On est alors assuré que la différence entre l'aire d'un polygone inscrit et celle du polygone circonscrit correspondant tend vers zéro avec les côtés de ces polygones.

Comme il est indiqué dans la note en question, on divisera le raisonnement en deux parties, correspondant respectivement aux n^{os} **259** et **260** du texte.

Quant aux aires non convexes, on les évalue comme sommes ou différences d'aires convexes.

Remarque. — On serait arrivé au même résultat par l'emploi du théorème du n° **255** relatif au polygone circonscrit. Le périmètre d'un tel polygone tend, en effet, vers la longueur de la circonférence lorsque le nombre des côtés augmente indéfiniment.

Corollaire. — *La surface du cercle de rayon* R *est* πR^2.

On a bien, en effet :

$$2\pi R \times \frac{R}{2} = \pi R^2.$$

262. On nomme *secteur circulaire* la portion de plan limitée par un arc de cercle et les rayons qui aboutissent à ses deux extrémités.

L'*aire* de ce secteur est la limite vers laquelle tend l'aire d'un secteur polygonal inscrit lorsque tous les côtés de la ligne brisée correspondante diminuent indéfiniment. L'existence de cette limite s'établit comme pour l'aire du cercle.

Théorème. — *L'aire d'un secteur circulaire est égale à l'arc qui lui sert de base, multiplié par la moitié du rayon.*

Car le périmètre de la ligne brisée régulière inscrite, lorsque le nombre des côtés augmente indéfiniment, tend vers la longueur de l'arc, et son apothème tend vers le rayon.

Corollaire. — La longueur de l'arc de $m^\circ\, n' p''$, sur la circonférence de rayon R, étant $\frac{\pi R}{180}\left(m + \frac{n}{60} + \frac{p}{3600}\right)$, la surface du secteur circulaire correspondant sera

$$\frac{\pi R^2}{360}\left(m + \frac{n}{60} + \frac{p}{3600}\right).$$

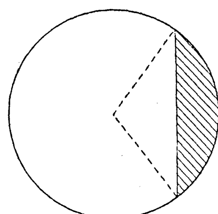
263. Aires limitées par des arcs de cercle.

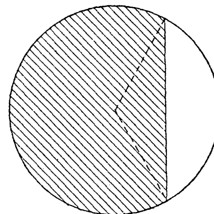
On nomme *segment* de cercle (*fig.* 213 et 214) l'espace compris entre un arc et sa corde.

Il est clair qu'on obtient l'aire d'un segment en retranchant du secteur correspondant au même arc le triangle qui a pour base la corde et pour sommet le centre du cercle, si l'arc en question est

moindre qu'une demi-circonférence (*fig.* 213), et en ajoutant ce même triangle dans le cas contraire (*fig.* 214).

Plus généralement, la mesure d'une aire limitée par des arcs de


Fig. 213.


Fig. 214.

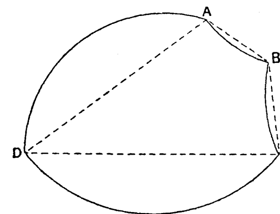


Fig. 215.

cercle se ramène à celle d'une aire polygonale par l'addition ou la soustraction de secteurs ou de segments.

Par exemple, l'aire curviligne ABCD (*fig.* 215) est égale à celle du quadrilatère ordinaire ABCD, diminuée des segments AB, BC et augmentée des segments CD, DA.

En résumé, nous savons *trouver l'aire de toute portion de plan limitée par des droites ou des arcs de cercles.*

EXERCICES

312. Quel est le rayon du cercle qui a pour surface 1^{mq}?

313. Quel est le rayon du cercle dans lequel le secteur dont l'angle est de 60° a pour surface 1^{mq}?

314. Quel est le rayon du cercle dans lequel le segment compris entre l'arc de 60° et sa corde a pour surface 1^{mq}?

315. La surface de la couronne circulaire comprise entre deux circonférences concentriques est égale à celle du cercle qui a pour diamètre la corde de la plus grande tangente à la plus petite.

316. B et D sont deux points pris sur le quart de circonférence AC à égale distance de ses extrémités : si de ces deux points on abaisse sur le rayon OC les perpendiculaires BE, DF, le trapèze mixtiligne BEDF est équivalent au secteur OBD.

317. Sur les côtés de l'angle droit et l'hypoténuse d'un triangle rectangle comme diamètres, on décrit des demi-circonférences; les deux premières extérieurement au triangle, la troisième, au contraire, du même côté que le triangle. Montrer que la somme des deux *lunules* ou croissants compris entre chacune des petites circonférences et la grande est égale à la surface du triangle.

318. Sur le côté AB du carré inscrit à un cercle de centre O comme diamètre extérieurement au cercle, on décrit une demi-circonférence. Le rayon OMN coupe cette demi-circonférence en N et le cercle primitif en M. Montrer que le triangle curviligne compris entre la droite MN et les arcs de cercle MA, NA est *quarrable*, c'est-à-dire qu'on peut trouver le côté du carré qui lui est équivalent.

CHAPITRE IV

CONSTRUCTIONS

264. Problème. — *Construire, sur une base donnée, un triangle équivalent à un triangle donné.*

La hauteur du triangle cherché est évidemment une quatrième proportionnelle à la base donnée, à la base et à la hauteur du triangle donné, puisque quatre nombres tels que le produit des extrêmes soit égal au produit des moyens forment une proportion. Une fois cette hauteur trouvée, on la portera sur une perpendiculaire quelconque à la base donnée, et l'on aura ainsi le sommet d'un des triangles (en nombre infini) qui satisfont à la question.

Il est, d'ailleurs, clair que l'on peut, de même, trouver un triangle équivalent à un triangle donné et ayant une hauteur donnée.

265. Problème. — *Construire un triangle équivalent à un polygone donné.*

On décomposera le polygone en triangles, auxquels on donnera même base, à l'aide de la construction précédente. Un triangle ayant cette même base et une hauteur égale à la somme des hauteurs des triangles partiels sera équivalent à la somme de ces triangles, c'est-à-dire au polygone donné.

Cette construction peut toutefois être considérablement abrégée, ainsi que nous allons le faire voir en supposant, pour simplifier, le polygone convexe.

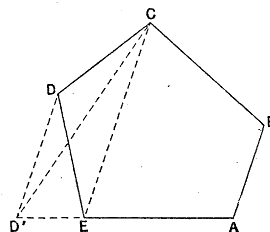


Fig. 216.

Soit le polygone ABCDE (*fig.* 216). Menons la diagonale CE qui joint les deux sommets adjacents au même sommet D et, par ce sommet D, menons la parallèle DD′ à CE, jusqu'à rencontre en D′ avec le côté AE

prolongé. Le triangle CED′ étant équivalent au triangle CED (**250**) et, par conséquent, le polygone ABCD′ au polygone ABCDE, nous avons remplacé le polygone donné par un polygone équivalent et ayant un côté de moins. Nous continuerons ainsi jusqu'à ce que nous soyons arrivés à un triangle.

Problème. — *Construire un carré équivalent à un polygone donné.*

Le côté du carré cherché sera moyen proportionnel entre la base et la demi-hauteur du triangle fourni par la construction précédente.

266. Problème. — *Construire un polygone équivalent à un polygone donné et semblable à un autre polygone donné.*

Soit à construire le polygone P semblable au polygone donné P′ et équivalent au polygone donné P_1.

Soit a' le côté du carré équivalent à P′, a le côté du carré équivalent à P_1, ces côtés étant obtenus ainsi qu'il vient d'être dit. Le rapport des surfaces des polygones P′ et P_1, c'est-à-dire le rapport des surfaces du polygone P′ et du polygone cherché est

$$\frac{a'^2}{a^2} = \left(\frac{a'}{a}\right)^2.$$

Par conséquent, si A′B′ est un côté quelconque de P′, le côté correspondant AB du polygone cherché est donné par la proportion

$$\frac{a'}{a} = \frac{A'B'}{AB}$$

On le trouvera donc par une quatrième proportionnelle (**151**) et on sera ramené à la construction du n° **152**.

267. Le célèbre problème de la *quadrature du cercle* consiste à trouver le côté du carré équivalent à un cercle donné.

Ce côté, d'après ce que nous savons sur l'aire du cercle, est moyen proportionnel entre le rayon et la demi-circonférence, et le problème serait résolu si l'on connaissait celle-ci.

Inversement, si l'on connaissait le côté du carré équivalent au cercle, la demi-circonférence serait une troisième proportionnelle au rayon et à ce côté.

Le problème de la quadrature du cercle revient donc absolument à celui dont nous avons parlé au n° **184** : *Construire la longueur*

d'une circonférence de rayon donné. Ainsi que nous l'avons dit, ce problème, et par conséquent le problème de la quadrature du cercle, ne peuvent être résolus à l'aide de la règle et du compas.

EXERCICES

319. Construire un rectangle, connaissant son périmètre et sa surface.
Quel est le plus grand rectangle de périmètre donné ?

320. Inscrire dans un cercle un rectangle d'aire donnée.
Quel est le plus grand rectangle inscrit à un cercle donné (1) ?

321. Diviser un triangle en parties équivalentes par des droites de direction donnée.
Même problème pour un polygone quelconque.

322. Diviser un quadrilatère en parties équivalentes par des droites issues d'un sommet. — Démontrer qu'il suffit de diviser en parties égales la diagonale qui ne passe pas par ce sommet et de mener par les points de division des parallèles à l'autre diagonale, jusqu'à rencontre avec le périmètre du polygone.

323. Diviser un polygone quelconque en parties équivalentes, par des droites issues d'un sommet.

PROBLÈMES

PROPOSÉS SUR LE QUATRIÈME LIVRE.

324. Montrer qu'on peut remplacer les énoncés de l'exercice 296 par d'autres vrais, quelle que soit la position du point O dans le plan, en convenant de faire précéder l'aire d'un triangle du signe $+$ ou du signe $-$, suivant son sens de rotation.

325. Si deux polygones sont homothétiques directs, le plus grand comprenant le plus petit à son intérieur, tout polygone à la fois inscrit dans l'un et circonscrit à l'autre a une aire moyenne proportionnelle entre celles des deux premiers.

(1) Pour la solution algébrique du même problème, voir Bourlet, *Leçons d'Algèbre élémentaire*, livre IV, ch. v.

326. Trouver le rapport de l'aire d'un triangle à celle du triangle qui a pour côtés les médianes du premier.

327. On mène, par deux sommets, d'un triangle, des droites divisant les côtés opposés dans des rapports donnés. Trouver les rapports mutuels des différentes parties en lesquelles se trouve ainsi partagée l'aire du triangle.

328. On mène, par les trois sommets d'un triangle, des droites qui divisent les côtés opposés dans des rapports donnés. Trouver le rapport de la surface du triangle formé par ces droites à la surface du triangle primitif. — Déduire de là le théorème des nos **197-198**, qui donne la condition pour que les trois droites passent par un même point.

329. Par un point donné dans un angle, mener une sécante qui forme avec les côtés de l'angle un triangle de surface donnée. (On commencera par tracer un parallélogramme ayant deux de ses côtés suivant les côtés de l'angle donné, un troisième passant par le point donné et ayant l'aire donnée. La sécante cherchée devra détacher de ce parallélogramme un triangle équivalent à la somme de ceux qu'elle forme avec ses côtés, extérieurement à lui.)

330. Parmi toutes les droites qui passent par un point donné à l'intérieur d'un angle et qui coupent ses côtés (et non leurs prolongements), laquelle forme le plus petit triangle?

331. Parmi tous les polygones d'un même nombre de côtés inscrits à un même cercle, le plus grand est le polygone régulier (1).

332. Construire un triangle, connaissant un côté, la hauteur correspondante et le rayon du cercle inscrit.

333. Inscrire, dans un cercle donné, un trapèze dont on connaît un angle et la surface.

334. Un triangle et un parallélogramme ont une même base, un angle à la base égal et même surface. Décomposer l'un de ces polygones en deux parties qui autrement assemblées, donnent l'autre.

335. Deux triangles ont même base et même hauteur. Décomposer l'un d'eux en parties qui, autrement assemblées, donnent l'autre. (Ramener à la question analogue relative aux parallélogrammes, à l'aide de l'exercice précédent.)

336. Même problème pour deux triangles équivalents quelconques.

337. Même problème pour deux polygones équivalents quelconques.

(1) Un polygone non régulier inscrit au cercle a au moins un côté plus petit que celui du polygone régulier et un côté plus grand, et l'on peut toujours, sans charger l'aire du polygone ni son cercle circonscrit, ramener ces deux côtés à être consécutifs :
Soient AB, BC. En déplaçant alors le sommet B de manière manière à rendre AB égal au côté du polygone régulier inscrit, on augmente l'aire; et, en effectuant cette opération autant de fois qu'il est nécessaire pour remplacer le polygone primitif par le polygone régulier, on obtiendra la conclusion cherchée.

338. Quatre points A, B, C, D étant donnés, le produit de l'aire du triangle BCD par la puissance du point A relative au cercle circonscrit à ce triangle est égal aux produits analogues formés avec le point B et le triangle CAD, ou avec le point C et le triangle ABD, ou avec le point D et le triangle ACB.

Montrer qu'on peut considérer ces égalités comme vraies en grandeur et en signe, en adoptant la convention de l'exercice 324.

339. L'un quelconque des produits formés dans l'exercice précédent est égal à l'aire d'un triangle dont les côtés seraient mesurés par les produits AB·CD, AC·BD, AD·BC (n° **238**, ex. 270 *bis*).

340. Décomposer un triangle en triangles isoscèles.

Même problème pour un polygone quelconque.

341. Évaluer l'aire du triangle formé par trois arcs de cercles de même rayon R, se coupant mutuellement à angle droit.

342. Si deux triangles sont symétriques l'un de l'autre par rapport au centre du cercle inscrit commun, les aires des huit triangles que forment entre eux leurs côtés ont pour produit la seizième puissance du rayon de ce cercle.

NOTE A

SUR LA MÉTHODE EN GÉOMÉTRIE.

268. Nous voudrions rassembler, sous ce titre, quelques conseils que nous croyons utiles pour l'intelligence des mathématiques en général et, en particulier, pour la résolution des problèmes.

L'élève doit, en effet, se persuader qu'il ne pourra recueillir quelque fruit de ses études mathématiques, ni même les poursuivre sans efforts exagérés et se faire une idée juste de ce qu'est la géométrie, s'il ne parvient non seulement à comprendre les raisonnements qui lui sont exposés, mais encore à en construire d'autres par lui-même, à trouver, dans une mesure plus ou moins étendue, des démonstrations de théorèmes ou des solutions de problèmes.

Contrairement à un préjugé trop enraciné, ce résultat peut être atteint par tout le monde, ou du moins par tous ceux qui s'astreindront à réfléchir et à diriger méthodiquement leurs réflexions. Les préceptes que nous allons indiquer relèvent du bon sens le plus vulgaire. Il n'est pas un d'entre eux qui ne puisse sembler au lecteur une pure banalité. Cependant, l'expérience le montre, l'oubli de l'une ou de l'autre de ces règles évidentes est la cause à peu près unique des difficultés qui se présentent dans la résolution des problèmes élémentaires ; et il en est encore ainsi, plus souvent qu'on ne serait tenté de le croire, dans des recherches ayant pour objet des parties plus ou moins élevées de la science mathématique.

a). THÉORÈMES A DÉMONTRER.

269. Démontrer un théorème, c'est passer, par la voie du raisonnement, de l'hypothèse à la conclusion.

Dans le théorème (livre I, n° **36**) :

Tout point situé sur la bissectrice d'un angle est également distant des deux côtés de cet angle,

L'hypothèse et la conclusion sont :

Hypothèse.	Si le point M est situé sur la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ (*fig.* 35).
Conclusion :	Alors il sera également distant de AB et de AC.

Nous avons à déduire celle-ci de celle-là, à *transformer* les propriétés énoncées dans l'hypothèse de manière à en dégager celles qui constituent la conclusion.

Il est évidemment nécessaire, avant tout, *de savoir très exactement quelle est l'hypothèse et quelle est la conclusion d'un théorème* que l'on veut démontrer : l'élève devra donc, tout d'abord, s'exercer à les énoncer sans aucune hésitation.

270. Mais il y a plus, et nous pouvons faire dès à présent une première remarque importante. Dans toute démonstration, on se propose de faire voir que la conclusion a lieu en *supposant vraie l'hypothèse*. Si l'on ne considérait pas celle-ci comme certaine, rien n'assurerait plus l'exactitude de celle-là. Ainsi, dans l'exemple cité au numéro précédent, si le point M n'était pas sur la bissectrice, nous savons (nº **36**) qu'il *ne serait pas* équidistant des deux côtés.

Or il est clair qu'il ne servirait à rien de supposer qu'un fait a lieu, si le raisonnement ne portait pas trace de cette supposition, si ce fait n'était pas utilisé à un moment quelconque. Nous voyons donc qu'*il faut faire intervenir dans le raisonnement l'hypothèse* et même, en général, *toute l'hypothèse*.

271. Nous reviendrons un peu plus loin sur la règle précédente. Auparavant, nous devons en formuler immédiatement une autre tout à fait analogue, mais sur laquelle il y a lieu d'appeler tout spécialement l'attention, car elle est, malgré son absolue nécessité, une de celles qui sont le plus fréquemment méconnues. Elle est relative à la *définition* des termes employés.

D'une part, en effet, il est évident qu'on ne saurait raisonner sur des notions qui n'ont pas été définies ; et, d'autre part, comme tout à l'heure, il est clair qu'il revient au même d'ignorer une définition ou de ne pas la faire intervenir dans le raisonnement.

Nous voyons donc qu'il convient, avant tout, de se *reporter à la définition* de toute notion en présence de laquelle on est mis.

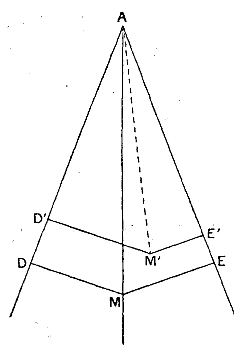


Fig. 35.

Exemple. — Soit encore le même théorème :

Tout point situé sur la bissectrice d'un angle est également distant des deux côtés de cet angle.

Nous devrons nous poser, dès l'abord, les questions suivantes :

Qu'exprime-t-on en disant que la droite MA (fig. 35) *est bissectrice ?*

Réponse. — Qu'elle divise l'angle A en deux parties égales.

Qu'est-ce que la distance du point M *à la droite* AB ?

RÉPONSE. — C'est la longueur de la perpendiculaire abaissée de ce point sur cette droite.

Et notre énoncé deviendra

Hypothèse. $\left\{ \begin{array}{l} \widehat{MAD} = \widehat{MAE}; \\ \text{MD est perpendiculaire sur AD;} \\ \text{ME est perpendiculaire sur AE;} \end{array} \right.$

Conclusion : MD = ME.

Nous espérons, par cet exemple, avoir fait suffisamment comprendre le sens de cette règle, que Pascal met à la base de toute logique :

Il faut **substituer les définitions à la place des définis** (1).

272. La définition d'un même terme peut souvent revêtir plusieurs formes, entre lesquelles on doit choisir la plus commode pour le but que l'on a en vue. Ainsi, on peut encore définir la bissectrice de l'angle AM comme la droite qui fait avec l'un des côtés un angle égal à la moitié du premier.

Cette manière de formuler la définition ne serait pas avantageuse pour le théorème précédent ; c'est elle, au contraire, qui nous a servi à démontrer, par exemple, le théorème du n° **17** (liv. I).

Certains théorèmes permettent de remplacer, de la même façon, une définition par une autre équivalente. C'est ainsi que la définition primitive des parallèles (n° **38**) n'est plus employée à partir du n° **39**, où on apprend à la remplacer par la suivante, qui revient exactement à la première : *Deux parallèles sont deux droites qui forment avec une même sécante deux angles alternes-internes égaux (ou deux angles correspondants égaux, ou deux angles intérieurs du même côté supplémentaires).*

273. La règle énoncée plus haut est peut-être la plus importante de celles dont nous avons à nous occuper ici. La portée en apparaîtra si l'on songe qu'un grand nombre de constructions auxiliaires, quelquefois arbitraires en apparence, en sont une conséquence directe.

Pour n'en citer qu'un exemple, c'est ainsi que, dans le commencement du IIe livre, lorsqu'on a à raisonner sur un point quelconque d'une circonférence, on commence toujours par joindre ce point au centre. Le lecteur qui aura réfléchi aux remarques précédentes comprendra que cette construction n'a rien d'artificiel et doit apparaître immédiatement comme nécessaire. Elle dérive en effet de la définition de la circonférence, d'après laquelle, pour exprimer qu'un point M appartient à une circonférence de centre O, on doit exprimer que la distance OM est égale au rayon de cette circonférence.

A partir du chapitre V (nos **73** et suiv.) on voit les choses changer : il n'arrive plus toujours que l'on joigne au centre d'une circonférence les

(1) Il est même nécessaire, en général, d'utiliser toutes les parties de la définition, lorsqu'il y en a plusieurs ; on peut répéter, à ce sujet, ce que nous disons un peu plus loin, relativement à l'hypothèse (n° **275**).

points de cette ligne sur lesquels on doit raisonner. C'est que nous avons appris alors à remplacer la définition primitive de la circonférence par une autre, celle qui a été donnée au n° **82** *bis* et d'après laquelle, pour exprimer qu'un point M appartient à une circonférence, on peut le joindre à trois points A, B, C, de cette courbe et exprimer que le quadrilatère ABCM remplit l'une des conditions d'inscriptibilité énumérées au n° **81**. Dès lors, dans tout raisonnement où intervient une circonférence, on a le choix entre les deux définitions : c'est l'une ou l'autre qui est employée, suivant les circonstances[1].

274. Après avoir pris la précaution dont nous venons de parler, il s'agit, comme nous l'avons dit, de transformer les données de l'hypothèse de manière à mettre en évidence la conclusion.

Dans les cas les plus simples, on aperçoit immédiatement un théorème permettant d'opérer cette transformation.

EXEMPLE. — L'hypothèse dont il est question au n° **271**, fournit immédiatement la conclusion correspondante par l'intermédiaire d'un cas d'égalité des triangles rectangles.

Dans d'autres cas, au contraire, il faudra passer par un ou plusieurs intermédiaires. On pourra chercher, par exemple, à donner à l'hypothèse une autre forme se rapprochant le plus possible de la conclusion.

EXEMPLE. — Soit à démontrer le théorème (n° **25**) :

Dans tout triangle, à un plus grand côté est opposé un plus grand angle.

Ayant à exprimer que AB est plus grand que AC, nous prenons sur AB la longueur AD = AC, de sorte que le point D est entre A et B. L'hypothèse et la conclusion sont donc

(I) Hypothèse. $\begin{cases} \text{AD est le prolongement de DB,} \\ \text{AD} = \text{AC}. \end{cases}$

Conclusion : $\widehat{ACB} > \widehat{ABC}$.

Le triangle isoscèle ADC, dans lequel les angles à la base sont égaux, permet alors de donner à l'hypothèse la nouvelle forme

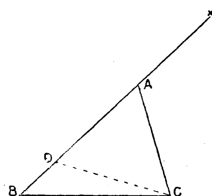


FIG. 217.

(II) Hypothèse. $\begin{cases} \text{DA est le prolongement de DB,} \\ \widehat{ADC} = \widehat{ACD}. \end{cases}$

Conclusion : $\widehat{ACB} = \widehat{ADC} + \widehat{DCB} > \widehat{ABC}$,

ou plus simplement

(III) Hypothèse. Dx est le prolongement de DB (*fig.* 217).

Conclusion : $\widehat{xDC} + \widehat{DCB} > \widehat{xBC}$

(1) D'autres définitions, équivalentes aux premières, se rencontrent dans la suite, par exemple, liv. III, n° **131**.

ce qui est évident, d'après le théorème sur l'angle extérieur au triangle (même numéro).

Nous sommes, on le voit, arrivés à un résultat par une série de *transformations successives*.

275. C'est dans chacune de ces transformations qu'il convient particulièrement de ne pas négliger l'application de notre première règle (nº **270**) et d'examiner si aucune partie de l'hypothèse n'est restée inutilisée ou n'a été abandonnée. On s'assurera qu'il en est ainsi en cherchant si la nouvelle hypothèse revient exactement à l'ancienne, lui est entièrement *équivalente*.

Exemple. — Dans l'exemple précédent, la forme (II) de l'hypothèse est absolument équivalente à la forme (I) : c'est-à-dire que si l'hypothèse (I) est vérifiée, il en est de même de l'hypothèse (II) **et réciproquement.** En effet, la seule différence consiste en ce que l'égalité $AC = AD$ a été remplacée par $\widehat{ADC} = \widehat{ACD}$. Or nous savons que l'une *quelconque* de ces deux conditions entraîne l'autre. L'hypothèse (II) peut donc être absolument substituée à la première : se donner l'une ou se donner l'autre, revient au même.

Quoiqu'il puisse arriver qu'un élément de l'hypothèse soit abandonné sans inconvénient [1], ce n'est pas ce qui a lieu en général [2]; et lorsqu'on se trouvera arrêté dans le cours d'une démonstration, on devra se demander si cette impossibilité d'arriver au but n'est pas due à ce qu'on a perdu, chemin faisant, une partie de l'hypothèse donnée.

Exemple. — Soit à démontrer le théorème suivant :

M *étant un point dans le plan d'un triangle* ABC, *on fait l'angle* $\widehat{BAP} = \widehat{MAC}$ (fig. 218) *et on prend la longueur* $AP = AM$; *on fait de même* $\widehat{CBQ} = \widehat{MBA}$,

(1) C'est ce qui arrive pour l'hypothèse (III) du même exemple, par rapport à l'hypothèse (II). Celle-ci est, en effet, exactement équivalente à

(II′) { Dx est le prolongement de DB;
il existe sur Dx *un point tel, que le triangle qui a ce point pour sommet et* DC *pour base ait ses angles à la base égaux.* }

Car ce dernier point pourra évidemment être appelé le point A. Mais ce point peut ne pas exister, même si l'hypothèse (III) :

(III) Dx est le prolongement de DB

est vérifiée. Il faut, pour qu'il existe, que l'angle $\widehat{xDC}$ soit aigu, d'après le théorème sur l'angle extérieur.

Donc l'hypothèse (III) peut avoir lieu sans que l'hypothèse (II) soit vraie.

(2) On s'attache précisément à donner aux énoncés des formes telles, que l'hypothèse ne contienne aucun élément inutile. Dans les recherches plus élevées, et surtout dans les applications des mathématiques, la plus grande difficulté consiste souvent à reconnaître quelles sont, parmi les données de la question, celles que l'on doit utiliser.

$BQ = BM$; et $\widehat{ACR} = \widehat{MCB}$, $CR = CM$. *Les points* M, P, Q, R *sont sur un même cercle* ; autrement dit

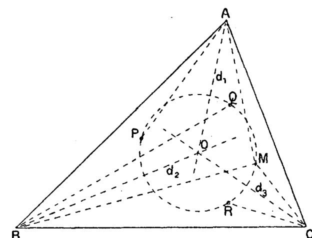


Fig. 218.

(I) Hypothèse. $\left\{ \begin{array}{l} \widehat{BAP} = \widehat{MAC};\ AP = AM; \\ \widehat{CBQ} = \widehat{MBA};\ BQ = BM; \\ \widehat{ACR} = \widehat{MCB};\ CR = CM. \end{array} \right.$

Conclusion : M, P, Q, R sont sur un même cercle.

Soit d_1 la bissectrice de l'angle A : les deux côtés AB, AC sont symétriques par rapport à cette droite, et à cause de l'égalité des angles $\widehat{BAP}$, $\widehat{MAC}$, il en est de même de AM, AP. Donc le point P est le symétrique de M par rapport à d_1 ; de même, Q est le symétrique de M par rapport à la bissectrice d_2 de l'angle B ; et R, le symétrique de M par rapport à la bissectrice d_3 de l'angle C. Nous sommes donc tentés de transformer ainsi l'hypothèse :

(II) Hypothèse. $\left\{ \begin{array}{lllll} \text{P est le symétrique de M par rapport à la droite } d_1 \\ \text{Q} \quad — \quad — \quad d_2 \\ \text{R} \quad — \quad — \quad d_3. \end{array} \right.$

Conclusion : M, P, Q, R sont sur un même cercle.

Or si l'on partait de cette forme de l'énoncé, il serait impossible d'arriver à une démonstration ; en effet la proposition, ainsi formulée, est fausse. Il n'est pas vrai qu'un point quelconque M et ses symétriques P, Q, R par rapport à trois droites *quelconques* soient sur un même cercle. C'est ce dont on se rend compte à la simple inspection de la figure 219 ; ou encore, en remarquant que trois points quelconques P, Q, R peuvent être regardés comme les symétriques d'un point quelconque M par rapport à trois droites d_1, d_2, d_3, à savoir les perpendiculaires aux milieux de MP, MQ, MR.

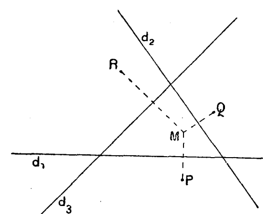


Fig. 219.

Nous avons donc commis une faute en substituant la forme (II) de l'énoncé, à la forme (I). Cette faute tient à ce que les trois droites d_1, d_2, d_3 ne sont pas quelconques : ce sont les bissectrices des angles du triangle donné et, comme telles, elles concourent en un même point. La forme correcte de l'hypothèse transformée est donc [1]

(II') Hypothèse. $\left\{ \begin{array}{l} \text{P est symétrique de M par rapport à la droite } d_1; \\ \text{Q} \quad — \quad — \quad d_2; \\ \text{R} \quad — \quad — \quad d_3; \\ \text{les droites } d_1, d_2, d_3 \text{ concourent en un même point O} \end{array} \right.$

et conduit immédiatement au résultat, car on voit immédiatement que les quatre points M, P, Q, R sont sur une même circonférence de centre O.

(1) Cette nouvelle hypothèse peut être substituée à l'ancienne : trois droites concourantes peuvent, en général, être regardées comme les bissectrices des angles d'un triangle (ex. 38).

276. Au lieu de transformer l'hypothèse pour la rapprocher de la conclusion, il y aura souvent avantage à opérer d'abord sur celle-ci, et à s'efforcer de remplacer la conclusion primitive par une autre qui entraîne la première et qui se déduise plus aisément de l'hypothèse.

Exemple. — Soit à démontrer le théorème. (Ex. 72.)

Si d'un point M, *situé sur la circonférence circonscrite à un triangle* ABC, *on abaisse des perpendiculaires* MP, MQ, MR *sur les trois côtés, les pieds de ces perpendiculaires sont en ligne droite.*

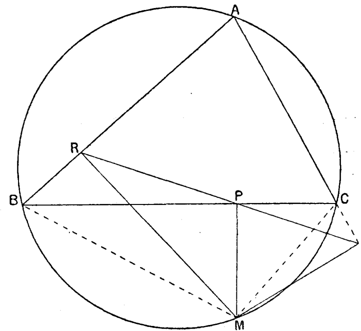


Fig. 220.

Nous démontrerons que les points P, Q, R (*fig.* 220) sont en ligne droite si nous démontrons que, en joignant PQ, PR, les angles $\widehat{BPR}$, $\widehat{CPQ}$, qui ont la position d'opposés par le sommet, sont égaux. Donc, l'hypothèse étant

Hypothèse : { Les points A, B, C, M sont sur un même cercle; MP, MQ, MR, sont respectivement perpendiculaires sur BC, CA, AB,

nous pouvons donner à la conclusion la forme

Conclusion : $\widehat{BPR} = \widehat{CPQ}$.

Mais (**81**), en raison des angles droits $\widehat{BRM}$, $\widehat{BPM}$, le quadrilatère BRPM est inscriptible et donne $\widehat{BPR} = \widehat{BMR}$; de même le quadrilatère CQMP est inscriptible et donne $\widehat{CPQ} = \widehat{CMQ}$. Il nous suffira donc d'établir (moyennant la même hypothèse), la conclusion

Conclusion : $\widehat{BMR} = \widehat{CMQ}$.

La conclusion primitive a donc été remplacée par une autre, dont la démonstration est plus simple et sera trouvée aisément par le lecteur (1).

Il est clair que, dans cette nouvelle manière de procéder, on devra prendre une précaution analogue à celle que nous avons recommandée dans la première, et s'assurer que l'on ne cherche pas à démontrer plus que la conclusion donnée, à moins que l'on n'ait des raisons de croire que cette conclusion plus étendue que la première est encore exacte.

277. Il convient, à présent, de revenir sur une remarque importante que nous avons dû laisser de côté en commençant et que, cependant, l'on doit appliquer dès la lecture de l'énoncé donné.

(1) Nous avons raisonné en admettant que la disposition de la figure était celle qui est représentée (fig. 220). Il conviendra de modifier la démonstration de manière à la rendre indépendante de cette disposition : ce qui est aisé à l'aide des remarques du n° **82**. Toutefois, dans le problème actuel, on peut toujours se placer dans le cas auquel se rapporte notre raisonnement; il suffira de changer, au besoin, l'ordre des lettres A, B, C.

Il est à observer, en effet, que beaucoup de théorèmes sont susceptibles d'être énoncés sous plusieurs formes différentes. Nous en avons signalé des exemples dans le texte.

EXEMPLE I. — Nous avons remarqué au numéro **32** que la proposition :

Tout point équidistant de deux points A, B *est sur la perpendiculaire au milieu de* AB

peut encore s'énoncer :

Tout point qui n'est pas sur la perpendiculaire au milieu de AB *est inégalement distant de* A *et de* B.

Nous avons vu qu'il y a là une remarque générale : la proposition contraire d'une proposition quelconque équivaut à la réciproque de la même proposition.

C'est dans le même ordre d'idées que rentre le mode de démonstration dit *par l'absurde* et qui consiste à montrer qu'en supposant en même temps l'hypothèse vraie et la conclusion fausse, on est conduit à une contradiction.

EXEMPLE II. — L'énoncé (nº **23**) :

La bissectrice de l'angle au sommet d'un triangle isoscèle est perpendiculaire à la base et la divise en deux parties égales

revient, nous l'avons vu [1] à l'un quelconque des suivants :

La hauteur abaissée du sommet tombe au milieu de la base et divise l'angle au sommet en deux parties égales ;

La perpendiculaire élevée au milieu de la base passe par le sommet et est bissectrice de l'angle au sommet ; etc.

Il est clair que cet exemple, comme le précédent, représente un fait général ; nous avons retrouvé le même fait, par exemple, au nº **62**, liv. II. D'ailleurs on le rencontre dès les premiers commencements de la géométrie. La démonstration du nº **15** (réciproque du théorème du nº **14**) n'est évidemment qu'une remarque de cette espèce.

Ces deux catégories générales de cas où un énoncé peut être remplacé par un autre équivalent ne sont d'ailleurs pas les seules ; la réflexion devra, dans chaque circonstance particulière, faire trouver les différentes formes que peut prendre une même proposition. Il est évidemment essentiel de les passer en revue, afin de choisir celle qui se prête le mieux à la démonstration, en un mot de *se poser la question de manière à en rendre la solution le plus aisée possible.*

278. Cette dernière observation termine l'exposé des règles fondamentales que nous nous proposions d'indiquer. Il sera utile d'étudier, au point de vue de l'application de ces principes, les démonstrations données dans le texte et de se poser, par exemple, des questions telles que les suivantes :

Pour démontrer le théorème sur les médianes d'un triangle (**55** *bis*), nous avons

(1) Rappelons que l'équivalence de ces différents énoncés tient à ce qu'il n'y a qu'*une* bissectrice de l'angle au sommet, qu'*une* hauteur, qu'*une* perpendiculaire au milieu de la base, etc.

(2) « On doit donner au problème une forme telle qu'il soit toujours possible de le résoudre. » (Abel).

pris les milieux de BG et de CG (*fig.* 53). Devait-on logiquement songer à cette construction? — Pourrait-on la remplacer par d'autres [1]?

— Peut-on remplacer l'énoncé du numéro **55** (droite qui joint les milieux des côtés d'un triangle) par un autre équivalent? — Pourrait-on démontrer directement ce dernier énoncé?

— Dans l'exercice 8, les deux parties de la conclusion à démontrer supposent-elles toutes deux le point donné intérieur au triangle? — La réponse à cette question indique-t-elle quel théorème doit être invoqué pour la démonstration de chacune des deux parties?

— Dans les démonstrations du nº **27**, à quel moment est-il fait usage de ce fait que le polygone enveloppé est convexe?

Etc., etc.

b). LIEUX GÉOMÉTRIQUES. — PROBLÈMES DE CONSTRUCTION.

279. Ce que nous venons de dire, relativement aux théorèmes à démontrer, nous dispense d'insister longuement sur les autres formes de questions possibles, dont la solution doit être cherchée d'après les mêmes principes, comme nous allons le voir à propos des lieux géométriques et des problèmes de construction.

Lieux géométriques. — Nous avons, dans le texte, appris à trouver un certain nombre de lieux géométriques : lieu des points équidistants de deux points donnés, ou de deux droites données, lieu des points situés à une distance donnée d'une droite donnée, etc.

D'autres lieux géométriques sont évidents par eux-mêmes; par exemple, un point tel, que la droite qui le joint à un point fixe A soit parallèle à une droite fixe xy, a pour lieu la parallèle à xy menée par A.

D'après cela, si on donne une propriété d'un point M, ou plus généralement les propriétés d'une figure variable dont fait partie ce point, on trouvera le lieu de M en transformant les propriétés données en d'autres auxquelles correspond, pour ce point, un lieu connu.

Nous sommes donc ici en présence d'une question tout analogue à celle qui se posait lorsqu'on demandait la démonstration d'un théorème. Il s'agissait alors, en effet, de déduire d'un ensemble de propriétés donné (l'hypothèse) un autre également donné (la conclusion). C'est encore une transformation de cette espèce qu'il s'agit d'opérer. La seule différence est que, cette fois, si le point de départ est donné, le point d'arrivée, la conclusion ne l'est pas : on sait seulement qu'elle doit être de nature à fournir le lieu cherché. (Il est clair qu'il faudra surtout rechercher les propriétés communes aux différentes positions de la figure mobile et, en particulier, les éléments de cette figure qui restent invariables lorsqu'elle se déplace.)

La marche à suivre est donc la même que dans le cas précédent, et nous n'aurions qu'à répéter ici les préceptes formulés tout à l'heure.

(1) Une de celles-ci est donnée dans l'exercice 37.

L'un d'eux s'applique même ici plus strictement que lorsqu'il s'agissait de théorèmes à démontrer. Nous avons vu que, dans cette dernière catégorie de questions, il pouvait arriver qu'une partie de l'hypothèse donnée fût abandonnée dans les transformations successives. Il ne pourra jamais en être ainsi dans la recherche d'un lieu géométrique, puisque le lieu cherché doit contenir les points qui possèdent les propriétés données et *rien que ceux-là*. On devra donc toujours assurer que la conclusion est exactement équivalente à l'hypothèse.

C'est ce que nous avons fait pour la plupart des lieux obtenus dans le texte (voir : n^os **33**, **36**, **77**, etc.); nous ne nous sommes dispensés d'indiquer cette seconde partie du raisonnement que dans certains cas où elle était assez aisée à suppléer pour qu'il fût inutile d'insister.

280. Problèmes de construction. — Supposons, en second lieu, qu'il s'agisse de construire une figure d'après des conditions données. La réponse à une telle question est de nature très différente, suivant que les conditions données sont ou non en nombre exactement suffisant pour déterminer la figure inconnue.

Exemple. — 1° Soit à *construire une droite tangente à une circonférence donnée.*

La tangente en un point quelconque de la circonférence donnée répondra à la question. Il y a une infinité de solutions : les conditions données *ne suffisent pas* pour déterminer la figure. Le problème est dit *indéterminé*.

2° Soit à *construire une droite tangente à deux circonférences données.*

Il y a, comme on voit, une condition de plus que tout à l'heure. Cette fois, le problème est *déterminé :* il y a quatre solutions (au plus) (n° **93**).

3° Soit à *construire une droite tangente à trois circonférences données.*

En général il n'y aura aucune droite répondant à la question. Car les deux premières circonférences admettent quatre tangentes communes (au plus), de sorte que la droite cherchée ne pourra être qu'une de ces quatre ; mais la troisième circonférence, donnée arbitrairement, ne sera en général tangente à aucune de ces quatre droites. Le problème est donc, sauf dans des cas particuliers, *impossible.* Il y a *trop* de conditions imposées à la figure cherchée.

En général, les problèmes proposés à l'élève seront des problèmes déterminés.

281. Souvent la résolution du problème revient à la construction d'un point.

Exemple I. — *Faire passer une circonférence par trois points donnés* (n° **90**).

Il suffit de déterminer le centre.

Exemple II. — *Construire un triangle, connaissant un côté, l'angle opposé et la hauteur correspondante.*

Ayant placé n'importe où le côté donné, il n'y a plus à trouver que le sommet opposé.

Dans ce cas, la méthode employée généralement est la construction par *intersection de lieux géométriques*, qui consiste à déduire des données deux

lignes sur lesquelles doit se trouver le point inconnu : l'intersection des deux lignes fera connaître ce point.

EXEMPLE I. — *Pour trouver le centre de la circonférence qui passe par trois points donnés* A,B,C, il nous a suffi de remarquer que la condition d'être équidistant de A et de B fournissait un premier lieu géométrique de ce point, la condition d'être équidistant de A et de C un second lieu.

EXEMPLE II. — *Pour construire un triangle* ABC, *connaissant un côté* BC, *l'angle opposé* A *et la hauteur correspondante*, ayant placé le côté BC, on aura pour lieux du point A : 1° un segment capable de l'angle donné, décrit sur BC comme corde ; 2° une parallèle à BC, à une distance de cette droite égale à la hauteur donnée.

Appelons *condition simple* imposée à un point toute condition telle, qu'il existe une ligne lieu géométrique des points qui y satisfont. Un point est dès lors déterminé par *deux* conditions simples, et si l'on connaît les deux lieux correspondant à ces deux conditions (1), on trouvera le point cherché par leur intersection.

282. Outre les problèmes de construction traités précédemment dans le texte, on voit qu'il en existe beaucoup d'autres dont la solution s'obtient aisément, soit par l'intersection des lieux géométriques, soit autrement. Mis en présence d'un problème quelconque, on cherchera à transformer les données de ce problème de manière à le ramener à une de ces questions qu'on sait résoudre; par exemple, de manière à en déduire deux lieux géométriques d'un même point lié à la figure cherchée.

Ainsi l'on considérera une figure, laquelle sera supposée vérifier les conditions données (2) et ces conditions serviront d'hypothèse; mais, comme précédemment pour les lieux géométriques, il faudra trouver soi-même la conclusion.

Ces fois encore, les règles générales à observer sont les mêmes que dans la démonstration des théorèmes. Comme pour les lieux géométriques, il faudra que la conclusion obtenue soit entièrement équivalente à l'hypothèse. Car si, d'une part, des conditions données doit résulter la construction trouvée, d'autre part, il faut s'assurer que toute figure formée d'après cette construction vérifie nécessairement les conditions en question.

Nous n'insisterons pas davantage sur les particularités que présentent les problèmes de constructions et nous nous contenterons, à cet égard, de renvoyer le lecteur au livre de Petersen, intitulé *Méthodes et théories pour la résolution des problèmes de construction géométrique* (3), ouvrage excellent à tous égards et auquel nous avons fait de nombreux emprunts.

(1) En géométrie élémentaire, on s'attache à résoudre les problèmes *par la règle et le compas :* c'est-à-dire que les lieux géométriques en question devront toujours être des droites ou des cercles.

(2) C'est ce que nous avons appelé, au n° **93** par exemple, *supposer le problème résolu*.

(3) Trad. O. Chemin. Gauthier-Villars, 1880.

c). MÉTHODES DE TRANSFORMATION.

283. Si l'étudiant s'est habitué à mettre en pratique les conseils qui précèdent : s'il substitue, en quelque sorte mécaniquement, les définitions aux définis, s'il sait trouver rapidement les diverses formes sous lesquelles peut se poser le problème qu'il a en vue de résoudre, il sera bientôt en état de traiter un grand nombre des exercices qui peuvent se proposer sur la géométrie élémentaire. D'autres, cependant, pourront lui sembler inaccessibles ou très difficiles, et sont, en réalité, susceptibles de solutions parfois très simples ; seulement ces solutions ne dépendent pas uniquement du raisonnement direct dont nous venons de nous occuper, mais exigent le concours de moyens de simplification dont il nous reste à parler, et qui sont les méthodes de transformation.

A proprement parler, d'après ce qui a été dit plus haut, toute méthode géométrique pourrait être légitimement appelée « méthode de transformation ». Mais on réserve plus spécialement ce nom aux méthodes qui consistent à passer de certaines propriétés d'une figure à des propriétés correspondantes d'une *autre* figure.

Définir une *transformation*, c'est à une figure quelconque donnée, faire correspondre une autre figure suivant une certaine loi, de manière que la première étant donnée, la seconde soit déterminée, et inversement. De toute propriété de l'une on peut conclure une propriété de l'autre qui en est, en quelque sorte, la traduction.

Exemples. — Nous avons défini la figure F′, *homothétique* d'une figure F par rapport à un centre et à un rapport de similitude donnés. Si l'on donne la figure F, on peut construire la figure F′. Nous avons d'ailleurs vu qu'à toute droite de F correspond une droite parallèle de F′, à tout triangle de F un triangle semblable de F′, à toute circonférence de F une circonférence de F′, etc.

De même, étant donnée une figure F, on peut construire la figure F′ qui se déduit de la première par une rotation, ou une translation, ou une symétrie données ; ou plus généralement, une figure F′ semblable à F, et telle que les homologues de deux points donnés A, B soient deux points donnés A′, B′. Des propriétés de F résulteront immédiatement les propriétés de F′.

284. Il n'y a d'ailleurs pas toujours lieu d'appliquer la transformation à *toute* la figure considérée. Il y a, au contraire, souvent avantage à transformer une partie seulement de cette figure.

C'est ce qui arrive, en particulier, pour les transformations simples que nous venons de rappeler : déplacement, symétrie, homothétie et généralement similitude quelconque. Il n'y aurait, le plus souvent, aucun intérêt à appliquer de telles transformations à toute une figure, attendu que les propriétés de la figure transformée ne sont ni plus ni moins simples que celles de la primitive : elles sont les mêmes [1]. Par contre, dans beaucoup de questions, il est nécessaire de transformer ainsi une partie déterminée de la figure.

[1] La géométrie étudie précisément les propriétés qui ne varient pas par le déplacement.

Exemple I. — Soit le problème (ex. 32). *On donne deux parallèles et deux points* A *et* B, *extérieurs à ces parallèles et situés de part et d'autre ; quelle est la ligne brisée la plus courte joignant ces deux points de manière que la portion comprise entre les deux parallèles ait une direction donnée ?*

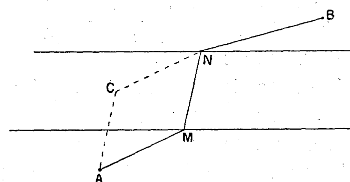


Fig. 221.

Soit AMNB la ligne brisée cherchée (*fig.* 221), le point N se déduit du point M par une translation évidemment connue, puisque la longueur interceptée par les parallèles données sur une droite quelconque ayant la direction donnée est la même. Nous pouvons appliquer cette translation à la droite AM; le point A est changé en un point connu C, et la droite AM en un segment de même longueur CN. On en déduit aisément que les points A, N, C doivent être en ligne droite.

Des considérations analogues s'appliquent aux exercices 118-122 (livre II).

Exemple II. — Dans l'exercice 14, le segment AM, après une symétrie par rapport à la droite donnée xy, viendra en ligne droite avec le segment BM.

285. Il est toutefois certains problèmes de construction pour la résolution desquels il convient de transformer par déplacement symétrie ou similitude, toute la figure considérée. L'avantage que l'on obtient ainsi est de faire correspondre, aux éléments inconnus de la figure primitive, des éléments connus de la figure transformée.

Exemple. — Soit à *inscrire dans un quadrilatère donné* ABCD *un autre quadrilatère semblable à un autre quadrilatère donné mnpq*.

Il existe une figure semblable à la figure proposée et dans laquelle, au quadrilatère cherché MNPQ, correspond le quadrilatère *mnpq*. Au quadrilatère ABCD correspondra un quadrilatère *abcd* circonscrit à *mnpq* et que, par conséquent, l'on construira par la résolution de l'exercice 213.

286. Les autres transformations que nous avons indiquées changent au contraire d'une façon plus ou moins notable les figures auxquelles on les applique.

Telle est, par exemple, l'*inversion*, qui change une droite de la figure primitive en un cercle de la figure transformée ; ou encore la transformation par *polaires réciproques*. Aussi avons-nous, dans le complément du III[e] livre, simplifié par ces transformations la démonstration d'un certain nombre de théorèmes.

Une autre transformation à laquelle nous avons simplement fait allusion, mais qu'il faut signaler, est la *perspective*. Telle que nous avons pu la définir en géométrie plane, elle ne s'applique qu'aux figures composées de points en ligne droite. On obtient la figure transformée en joignant chaque point de la figure primitive à un point fixe extérieur à la droite, coupant les rayons ainsi obtenus par une transversale quelconque et soumettant à un déplacement quelconque la figure obtenue sur cette transversale.

287. Il convient de remarquer une différence essentielle qui sépare la transformation par polaires réciproques des autres transformations que nous avons énumérées, telles que similitude, inversion, perspective.

Celles-ci sont des transformations *ponctuelles*, c'est-à-dire font correspondre à chaque point de la figure primitive un point déterminé de la figure transformée. Il n'en est pas de même de la transformation par *polaires réciproques* qui, à chaque point d'une des figures, fait correspondre une *droite* de l'autre.

Une autre transformation, qui a été utilisée à plusieurs reprises dans le texte, partage avec la précédente ce caractère de n'être pas ponctuelle, c'est celle que l'on peut nommer *dilatation* et que nous avons appliquée à des figures formées de cercles et de droites. Dans cette opération, on augmente ou diminue (suivant les cas) le rayon de chaque cercle d'une même quantité donnée a. Bien entendu il peut arriver, dans ces conditions, que le rayon d'une circonférence devienne nul : celle-ci deviendra alors un point ; inversement un point sera, dans cette transformation, considéré comme un cercle de rayon nul et se transformera, par suite, en un cercle de rayon a. Quant aux droites de la figure, chacune d'elles sera transportée perpendiculairement à sa direction, dans un sens ou dans l'autre, de cette même quantité a (1).

La propriété la plus importante de la dilatation est que deux lignes tangentes restent, après dilatation opérée dans un sens convenable, deux lignes également tangentes (ex. 59) (2). C'est cette propriété que nous avons utilisée aux nos **93** et **231**.

288. Formes réduites. — Le but de la transformation étant de simplifier la figure sur laquelle on opère, on doit s'efforcer de rendre cette simplification la plus grande possible.

A cet effet, nous remarquerons que les différentes espèces de transformations énumérées tout à l'heure comportent des éléments arbitraires. Par exemple, dans l'homothétie, il faut se donner le centre et le rapport d'homothétie ; dans l'inversion, le pôle et la puissance (3) ; dans la dilatation, la quantité a dont il a été question au numéro précédent ; etc.

Chacune de ces espèces comprend donc une infinité de transformations.

Parmi celles-ci, on en choisit une, telle que la figure transformée satisfasse à une ou plusieurs conditions déterminées que l'on prend, en général, aussi nombreuses que possible, en ayant égard à ce qui a été dit au n° **280**. Cette figure transformée est alors dite une *forme réduite* de la figure primitive.

Exemple I. — On peut toujours faire subir à un cercle C une dilatation qui le réduise à un point : il suffit de dilater d'une quantité précisément égale au rayon du cercle.

(1) On voit que la dilatation d'une droite ou d'un cercle peut toujours être effectuée dans deux sens différents entre lesquels on choisit, dans chaque cas particulier.

(2) La dilatation s'étend (à l'aide de considérations qui dépassent le cadre de cet ouvrage) à des figures où entrent des lignes quelconques, et l'on démontre qu'ainsi étendue, elle conserve la propriété de transformer deux lignes tangentes en deux lignes tangentes. Cette propriété appartient également à la transformation par polaires réciproques, généralisée d'une façon analogue.

(3) Nous avons vu (n° **215**) que le choix du pôle était en général le plus important.

Une *forme réduite*, par la dilatation, d'une figure contenant un cercle C est celle dans laquelle ce cercle est réduit à un point : forme réduite que nous avons employée aux numéros **93** et **231**.

Exemple II. — Deux cercles qui ont un point commun peuvent être transformés par une même inversion en deux droites (en prenant pour pôle d'inversion le point commun) ; deux cercles sans point commun, en deux cercles concentriques (ex. 248). Autrement dit, la forme réduite d'une figure composée de deux cercles est constituée par deux droites ou par deux cercles concentriques, suivant que les cercles primitifs ont un point commun ou non.

Exemple III. — Dans l'exemple cité plus haut, au n° **285**, nous avons utilisé une forme réduite de la figure proposée, par la similitude, forme déterminée par la condition que le quadrilatère cherché MNPQ soit transformé dans le quadrilatère donné *mnpq*.

289. Invariants. — L'avantage de la transformation pourrait être illusoire si, en simplifiant certaines propriétés de la figure, on se trouvait avoir compliqué les autres. Nous ne devrons donc effectuer cette transformation que si les diverses propriétés qui figurent dans l'énoncé sont modifiées par celle-ci d'une façon suffisamment simple.

Or, il se trouve que, dans presque toutes les catégories de transformations qui viennent d'être passées en revue, certaines propriétés ne subissent aucun changement ou, suivant l'expression consacrée, restent *invariantes*.

Exemple I. — Nous avons vu que, dans l'homothétie, les angles de la figure transformée sont les mêmes que ceux de la figure primitive, qu'il en est de même pour les rapports des longueurs entre elles, etc.

Exemple II. — Nous avons vu que la dilatation change deux autres cercles tangents en deux autres cercles également tangents entre eux. Le contact est une propriété invariante par la dilatation.

Exemple III. — L'angle de deux lignes est une propriété invariante par l'inversion (n° **219**).

Etc.

290. Il ne pourra y avoir aucun inconvénient à effectuer la transformation si, dans l'énoncé donné, ne figurent que des propriétés invariantes. En particulier, on pourra toujours, dans ces conditions, supposer la figure ramenée à une forme réduite.

Exemples. — Puisque le contact est conservé dans la dilatation, on peut, lorsqu'on cherche les tangentes communes à deux circonférences, supposer l'une d'elles réduite à un point. C'est la marche suivie au n° **93**.

Il en est de même, lorsqu'on cherche un cercle tangent à trois cercles donnés (n° **231**).

Le contact est également invariant par l'inversion. On peut donc, pour chercher un cercle tangent à trois cercles donnés, supposer deux de ceux-ci réduits à deux droites ou à deux circonférences concentriques (exercices 264-265).

Il en est de même dans la démonstration de théorèmes tels que le suivant : *Tous les cercles qui coupent deux cercles fixes donnés sous des angles constants sont tangents à deux cercles fixes ;* ou celui qui fait l'objet de l'exercice 285, etc.

291. Groupes [1]. — Cette propriété de posséder des invariants est, pour les transformations dont nous venons de parler, la conséquence d'une autre propriété fondamentale dont nous allons dire quelques mots.

On nomme *produit* de deux ou plusieurs transformations, la transformation qui équivaut aux premières, effectuées successivement dans l'ordre où elles sont nommées (2). Autrement dit, si la transformation S change la figure F en une figure F′ et que la transformation T, appliquée à la figure F′, la change en une figure F″, le produit ST de ces deux transformations sera la transformation par laquelle on passe de F à F″.

Exemple. — Le résultat du n° **102** peut s'énoncer ainsi :

Le produit de deux symétries est une rotation ou une translation.

Cela posé, on dit qu'un certain ensemble de transformations constitue un *groupe* si le produit de deux quelconques d'entre elles est encore une transformation appartenant à l'ensemble.

Ainsi l'*ensemble de toutes les homothéties est un groupe :* cela revient à dire que deux figures homothétiques d'une troisième sont homothétiques entre elles. L'ensemble de toutes les homothéties dont les pôles sont en ligne droite forme un groupe, puisque nous savons que le centre de l'homothétie, produit de deux autres, est en ligne droite avec les centres de celle-ci.

Tous les déplacements forment un groupe, puisque deux figures égales à une même troisième, avec le même sens, sont égales entre elles et de même sens.

292. L'ensemble des inversions ne forme pas un groupe. Le produit de deux inversions n'est pas une inversion. Mais on peut arriver à un résultat analogue au précédent, par la combinaison de plusieurs inversions successives.

Appelons, pour abréger, transformation S tout produit d'inversions (ou symétries) quelconques et en nombre quelconque. Cette catégorie comprend, en particulier, tous les déplacements, puisqu'un déplacement peut se décomposer en deux symétries ; toutes les homothéties, car une homothétie résulte de deux inversions de même pôle et de puissances différentes ; par conséquent aussi toutes les similitudes, une similitude résultant d'une homothétie jointe ou non à un déplacement et à une symétrie.

Il semble, d'après la définition des transformations S, que pour les avoir toutes, il faille considérer les opérations qui se composent de n inversions, n désignant successivement *tous* les nombres entiers, et qu'en s'arrêtant à une valeur quelconque de n, on n'ait qu'une partie des transformations considérées.

Il n'en est rien : toute transformation S peut se ramener à une inversion précédée ou suivie d'une, deux ou trois symétries, sauf le cas où cette transformation est une simple similitude (ex. 252). Par conséquent, il suffit de quatre opérations simples (inversions ou symétries) pour reproduire l'une quelconque des opérations S.

Deux opérations S quelconques étant chacunes équivalentes à une suite d'inversions, il en est de même de leur produit : *les opérations* S *forment donc un groupe* que l'on peut appeler, pour abréger, *groupe des inversions.*

(1) La fin de cette note est plus spécialement destinée aux lecteurs qui ont étudié les compléments du IIIe livre.

(2) Le produit de deux transformations change, en général, avec l'ordre des facteurs. Ainsi le produit de deux symétries par rapport à deux droites différentes est une rotation ou une translation double de celle qui amènerait la *première* droite sur la *seconde*.

293. Deux figures F, F′, qui sont changées l'une dans l'autre par une des transformations d'un groupe, sont dites *homologues* relativement à ce groupe. Par exemple, deux figures égales et de même sens sont homologues relativement au groupe formé par tous les déplacements.

D'après la définition du mot *groupe*, deux figures F, F″, homologues d'une même figure F′, sont homologues entre elles, puisque la transformation par laquelle on passe de F à F″ est le produit des transformations qui changent F en F′ d'une part, F′ en F″, de l'autre.

La forme réduite F_0 d'une figure F relativement à un groupe donné est celle des homologues de F par rapport à ce groupe qui vérifie certaines conditions données. Si ces conditions sont en nombre suffisant et convenablement choisies, elles suffiront à déterminer complètement la figure F_0, forme réduite de F.

Supposons qu'il en soit ainsi : si nous appliquons à F une quelconque des transformations du groupe, la nouvelle figure obtenue F′ aura encore pour forme réduite F_0, puisque les homologues de F′ sont les mêmes que celles de F.

La forme réduite d'une figure F étant la même que celle d'une quelconque de ses transformées, *toute propriété de la forme réduite est une propriété invariante de* F.

294. Nous allons éclaircir ceci par un exemple.

Soit la figure formée par quatre points quelconques A, B, C, D : proposons-nous de trouver les invariants de cette figure par rapport au groupe des inversions. A cet effet, prenons l'inverse de la figure, l'inversion employée I ayant son pôle en A. Les points B, C, D ayant pour inverses b, c, d, nous avons une figure homologue de la première (forme réduite) relativement au groupe, dans laquelle l'un des quatre points (celui qui correspond à A) est rejeté à l'infini. Nous allons voir, en refaisant dans ce cas particulier le raisonnement que nous venons d'indiquer d'une façon générale, que les angles du triangle bcd sont les invariants de la figure ABCD. (C'est la proposition dont nous demandons une démonstration directe dans l'exercice 270 *bis*.)

Soient A′, B′, C′, D′ les transformés de A, B, C, D par une inversion quelconque T. Opérons sur A′, B′, C′, D′ comme nous avons opéré sur A, B, C, D, et soit $b'c'd'$ la figure ainsi déduite de B′C′D′ par une inversion de pôle A′. On passe de la figure formée par les points b, c, d et un point à l'infini à la figure formée par les points b', c', d' et un point à l'infini par une transformation de notre groupe, à savoir le produit des trois inversions I, T, I′. Cette transformation, comme nous le savons, se ramène, soit à une inversion suivie de symétries, soit à une similitude. Or, la première hypothèse est impossible, du moins si l'inversion en question est une inversion véritable ; car celle-ci changera forcément un point à l'infini en un point à distance finie (à savoir le pôle d'inversion). Donc, les deux triangles bcd, $b'c'd'$ sont semblables. C. Q. F. D.

Les angles et les rapports des côtés du triangle bcd sont donc bien les invariants, relativement au groupe considéré, de la figure ABCD. Il n'y en a que deux *indépendants*, c'est-à-dire qu'il suffit de s'en donner deux, pour les connaître tous : deux angles du triangle bcd suffisent en effet pour construire un triangle semblable à celui-là.

295. Nous venons de voir que l'existence d'invariants découle de l'existence d'un groupe ; inversement, l'ensemble de toutes les transformations qui admettent les mêmes invariants forment un groupe : puisque, si deux transformations ne changent pas une certaine propriété, il en est de même de leur produit.

Exemple I. — L'homothétie change toute droite en une droite parallèle et pro-

portionnelle à la première. Inversement, toute transformation ponctuelle possédant cette double propriété et une homothétie (nº **142**). Donc, l'ensemble des homothéties forme un groupe. Le raisonnement du nº **144** n'est autre chose que celui que nous venons de faire sous une forme différente.

EXEMPLE II. — La perspective conserve le rapport anharmonique de quatre points; et, réciproquement, toute transformation appliquée à un système de points en ligne droite, et qui conserve le rapport anharmonique, est une perspective (1).

Donc, *les différentes perspectives forment un groupe.*

Nous bornerons ici ces indications sur les propriétés générales des transformations et, relativement à leur usage, nous renverrons le lecteur à l'ouvrage déjà cité de Petersen.

NOTE B

SUR LE POSTULATUM D'EUCLIDE

I

296. Nous avons admis, à titre d'axiome (au nº **40**), que *l'on ne peut mener d'un point, plus d'une parallèle à une droite.*

Dans les *éléments* du géomètre grec Euclide (2), où les principes de la géométrie sont exposés complètement pour la première fois et avec une remarquable perfection, ainsi que dans tous les traités ultérieurs (auxquels cet ouvrage capital a d'ailleurs toujours servi de base), l'énoncé en question ou, plus exactement, celui du nº **41** (Coroll. I), qui lui est équivalent :

Si deux droites font, avec une même sécante, deux angles intérieurs du même côté dont la somme diffère de deux angles droits, elles ne sont pas parallèles et se rencontrent du côté de la sécante où la somme des angles est moindre que deux droits,

figure également parmi ceux que l'on admet comme évidents.

Les successeurs d'Euclide, tant dans l'antiquité qu'au moyen âge et dans les temps modernes, n'ont cependant pas manqué de s'étonner de la place ainsi attribuée à cette proposition, qui est loin, en effet, de présenter le même caractère d'évidence que les autres propositions acceptées, comme elle, sans démonstration, et ne semble pas plus claire, *a priori*, que beaucoup de celles que l'on démontre. En particulier (on verra tout à

(1) On le prouve en transportant la figure transformée de manière qu'un point coïncide avec son homologue, les deux droites restant distinctes : on est alors ramené à l'exercice 233.

(2) Environ 300 ans av. J.-C.

l'heure la portée de cette remarque), ils ont trouvé singulier de voir Euclide admettre comme clair en soi, pour les lignes droites, ce qui n'est pas du tout exact pour les lignes en général [1].

297. De nombreux essais furent donc tentés pour démontrer le *Postulatum* d'Euclide : toutes ces tentatives échouèrent. En particulier, en essayant d'opérer par l'absurde et déduisant, pour cela, toutes les conséquences possibles de l'hypothèse où le Postulatum ne serait pas vérifié, on obtint une série de conclusions très différentes de celles que donne la théorie ordinaire des parallèles ; mais on eut beau pousser ces conclusions de plus en plus loin, jamais (du moins lorsqu'on les déduisit correctement) elles ne laissèrent apercevoir, ni entre elles, ni avec les propositions antérieures, une contradiction démontrant l'impossibilité de l'hypothèse initiale.

298. Le grand mathématicien *Gauss* [2] se demanda alors si une telle contradiction existait, si la non-exactitude du Postulatum d'Euclide n'était pas compatible avec les autres axiomes de la géométrie et les conséquences qu'on pouvait en tirer : autrement dit, s'il n'était pas *impossible* de démontrer la proposition en question.

Vers le même temps, *Lobatschefski* [3] et *Bolyai* [4] émirent, chacun de leur côté, la même hypothèse et construisirent une géométrie ayant en commun, avec la géométrie ordinaire, toutes les propositions antérieures au Postulatum d'Euclide ou indépendantes de ce Postulatum, mais dans laquelle tous les autres énoncés sont modifiés. Les résultats auxquels on parvient dans une telle géométrie (appelée Géométrie *non-euclidienne*) ont souvent une allure extrêmement paradoxale et contrastent avec notre manière habituelle d'envisager les choses ; mais, quelque étonnants qu'ils puissent paraître au premier abord, il n'en est aucun dont l'absurdité puisse être mise en évidence. Voici quelques-uns des plus simples.

En Géométrie non-euclidienne :

Par un point A, extérieur à une droite D, et dans le plan qui les contient, on peut mener *une infinité* de droites qui ne rencontrent pas la première [5]. Toutes ces *non-sécantes* sont situées dans un certain angle de sommet A (et dans son opposé par le sommet). L'angle en question, dit *angle de parallélisme*, augmente de grandeur avec la distance du point à la droite ;

Toute droite D′, *intérieure* à l'angle de parallélisme, admet, avec la droite donnée D, une perpendiculaire commune (et une seule), qui donne la plus courte distance des deux droites : de sorte que, si un point M parcourt la droite D′ en s'éloignant constamment et indéfiniment de cette perpendiculaire commune dans un sens ou

(1) *Wallis*, 1663. — Cf. *Stäckel et Engel*, *Die Theorie des Parallellinien, von Euklid bis Gauss*, Leipzig, Teubner, 1895.

(2) 1777-1855.

(3) 1793-1856.

(4) 1802-1860. — La géométrie non-euclidienne fut encore entrevue, plus ou moins nettement, de plusieurs côtés différents (Cf. l'ouvrage cité de *Stäckel* et *Engel*).

(5) On démontre que le Postulatum d'Euclide est toujours vrai ou toujours faux : on ne peut admettre l'existence d'un seul point extérieur à une droite et tel que la parallèle menée de ce point à la droite soit unique, sans admettre qu'il en soit de même pour tous les points et toutes les droites possibles.

dans l'autre, sa distance à la droite D augmente constamment et indéfiniment. Il n'en est pas de même pour les droites D'_1, D'_2 qui servent de *côtés* à l'angle de parallélisme : celles-ci, sans rencontrer jamais D, s'en rapprochent de plus en plus, si on les suit dans le sens où elles font un angle aigu avec la perpendiculaire abaissée du point A sur D : lorsqu'un point M parcourt indéfiniment l'une d'elles dans le sens ainsi choisi,

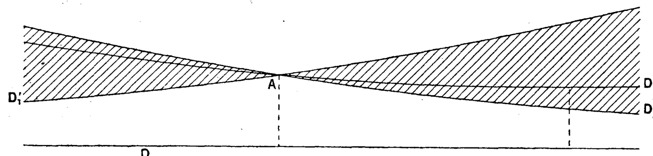
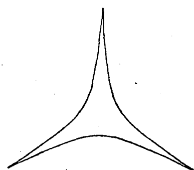


Fig. 222.

sa distance à la droite D tend vers zéro. — Le lieu des points d'un plan équidistants d'une droite fixe est une courbe ;

La somme des angles d'un triangle est *plus petite* que deux droits, et la différence est proportionnelle à l'aire du triangle. Il en résulte que celle-ci est toujours inférieure à une limite déterminée, si grands que soient les côtés (les angles diminuant et le triangle se creusant, en quelque sorte, d'une façon analogue à celle qu'indique la figure, lorsque les côtés augmentent). — De même, la somme des angles d'un polygone de n côtés est inférieure à $2n - 4$ droits, la différence étant proportionnelle à l'aire du polygone. Par conséquent, *il n'existe pas de rectangles :* si un quadrilatère a trois angles droits, le quatrième est aigu.



Il n'existe pas de figures semblables (1) (sauf, bien entendu, les figures égales). Deux triangles qui ont les trois angles égaux chacun à chacun, sont égaux. — Admettre l'existence de deux triangles semblables sans être égaux, c'est admettre le Postulatum d'Euclide.

Etc.

D'ailleurs il existe une infinité de géométries non-euclidiennes. Les relations qui lient entre elles les différentes parties d'une même figure contiennent en effet, dans l'hypothèse de Lobatschefski, un certain nombre k^2, déterminé une fois pour toutes, mais qui peut avoir une valeur quelconque : par exemple le rapport (constant, ainsi que nous venons de le dire) qui existe entre l'aire d'un triangle et le supplément de la somme de ses angles. *La géométrie euclidienne peut être considérée comme un cas limite des géométries non-euclidiennes :* elle correspond à $k = \infty$.

299. La géométrie non-euclidienne, qui apparaît ainsi comme exempte de contradiction, comme *logiquement possible*, est-elle véritablement telle, conformément aux idées de ses promoteurs ? Il pourrait, semble-t-il, n'y avoir là qu'une apparence, due à ce qu'on n'a pas encore poussé assez loin la suite des conséquences. Ne parviendrait-on pas, par une recherche

(1) Nous entendons ici par ce mot (contrairement à la définition donnée dans le courant de l'ouvrage) des figures qui aient leurs angles homologues égaux chacun à chacun, et leurs côtés homologues proportionnels.

plus persévérante ou mieux conduite, à rencontrer la contradiction qui ne s'est offerte ni à Gauss, ni à Bolyai, ni à Lobatschefski?

On peut affirmer qu'il n'en est rien. Sans développer en détail les raisons qui légitiment cette affirmation (1), nous emprunterons à M. H. Poincaré (2) une manière simple et frappante de les présenter :

« Imaginons une sphère S et, à l'intérieur de cette sphère, un milieu « dont l'indice de réfraction et la température soient variables. Dans ce « milieu se déplaceront des objets mobiles : les mouvements de ces objets « seront assez lents et leurs chaleurs spécifiques assez faibles pour qu'ils « se mettent immédiatement en équilibre de température avec le milieu; « de plus, tous ces objets auront même coefficient de dilatation, de sorte « que nous pourrons définir la température par la longueur de l'un quel- « conque d'entre eux. Soient R le rayon de la sphère, et ρ la distance d'un « point du milieu au centre de la sphère : je supposerai qu'en ce point la « température absolue (3) soit $R^2 - \rho^2$ et l'indice de réfraction $\frac{1}{R^2 - \rho^2}$.

« Que penseraient alors des êtres intelligents qui ne seraient jamais « sortis d'un pareil monde?

« 1° Comme les dimensions de deux petits objets transportés d'un point à « un autre varieraient dans le même rapport, puisque le coefficient de dila- « tation serait le même, ces êtres croiraient que ces dimensions n'ont pas « changé. Ils n'auraient aucune idée de ce que nous appelons différence « de température. Aucun thermomètre ne pourrait la leur révéler, puisque « la dilatation de l'enveloppe serait la même que celle du liquide thermo- « métrique.

« 2° Ils croiraient que cette sphère S est infinie : ils ne pourraient jamais, « en effet, atteindre la surface ; car, à mesure qu'ils en approcheraient, ils « entreraient dans des régions de plus en plus froides ; ils deviendraient « de plus en plus petits, sans s'en douter, et ils feraient de plus en plus « petits pas (4).

« 3° Ce qu'ils appelleraient lignes droites, serait des circonférences « orthogonales à la sphère S, et cela pour trois raisons :

(1) On a pu remarquer l'analogie des résultats précédemment cités de Géométrie non-euclidienne avec certains résultats de géométrie sphérique, auxquels ils sont, en quelque sorte, opposés : ainsi, la somme des angles d'un triangle sphérique est *plus grande* que deux droits, et la différence est proportionnelle à l'aire du triangle; deux triangles sphériques qui ont les angles égaux chacun à chacun sont égaux ou symétriques, etc. De fait, la géométrie sur certaines surfaces (dites *pseudosphériques*) est identique à la géométrie de Lobatschefski. C'est même ainsi qu'on a tout d'abord prouvé la possibilité logique de cette dernière; mais cette preuve n'est pas encore parfaite : 1° parce que les surfaces pseudosphériques ne peuvent pas être considérées comme illimitées en tous sens, ainsi que l'est le plan; 2° parce qu'elle ne s'applique qu'à la Géométrie non-euclidienne *plane*, et n'empêcherait pas de croire à la possibilité d'une démonstration du Postulatum par des considérations de géométrie dans l'espace.

(2) *Revue générale des sciences pures et appliquées*, tome III, 1892, p. 75.

(3) On désigne ainsi, en physique, la température comptée à partir d'un zéro tel, qu'elle soit proportionnelle au volume d'un corps thermométrique (en physique, il est expressément supposé que ce corps est un gaz très éloigné de son point de liquéfaction; ici, il s'agit d'un objet quelconque, puisque tous sont supposés avoir la même loi de dilatation, et la température absolue est proportionnelle, non au volume, mais à une dimension linéaire quelconque).

(4) On peut ajouter que, en vertu des propriétés attribuées à l'indice de réfraction, ils ne verraient pas ce qui se passe à l'extérieur de cette sphère.

« 1° Ce seraient les trajectoires des rayons lumineux ;

« 2° En mesurant diverses courbes avec un mètre, nos êtres imaginaires « reconnaîtraient que ces circonférences sont le plus court chemin d'un « point à un autre : en effet, leur mètre se contracterait ou se dilaterait « quand on passerait d'une région à une autre, et ils ne se douteraient pas « de cette circonstance ;

« 3° Si un corps solide tournait de telle façon qu'une de ces lignes « demeurât fixe, cette ligne ne pourrait être qu'une de ces circonférences : « c'est ainsi que, si un cylindre tournait lentement autour de deux « tourillons et était chauffé d'un côté, le lieu de ses points qui ne bou- « geraient pas serait une courbe convexe du côté chauffé, et non une ligne « droite.

« Il en résulterait que ces êtres adopteraient la géométrie de « Lobatschefski (1). »

Nous voyons bien maintenant qu'il est impossible de démontrer le Postulatum d'Euclide à l'aide des propositions antérieures : car, si une telle démonstration existait, elle serait admise par les êtres fictifs dont il vient d'être question (puisque toutes ces propositions antérieures subsisteraient à leur yeux) ; or elle conduirait alors à un résultat inexact, puisque, pour ces êtres, le Postulatum est faux.

II

300. Quel rôle faut-il donc assigner à cette proposition, qui n'est pas aussi évidente que les axiomes, et qu'on ne peut démontrer comme on démontre les théorèmes ?

Ce rôle est celui d'une définition. Pour faire comprendre ce que l'on doit entendre par là, nous devons nous reporter à ce qui a été dit dans la note précédente (note A, n° **271**).

Ainsi que nous l'avons vu à cet endroit, il est nécessaire d'avoir une définition pour tout terme figurant dans les énoncés : définition que l'on doit faire intervenir dans le raisonnement, en la substituant, chaque fois qu'il y a lieu, à la place du défini.

Or, il y a des termes qui n'ont pas été définis et ne peuvent pas l'être. Car on ne peut définir une notion qu'à l'aide de notions antérieures (2), ce qui est impossible pour les *premières* notions introduites.

Mais, comme ces notions sont claires par elles-mêmes et ont dès lors un certain nombre de propriétés évidentes, le rôle de la définition (dont la nécessité subsiste, comme nous venons de le rappeler, même dans ce cas)

(1) La constante arbitraire qui s'introduit en géométrie non-euclidienne est représentée ici par le rayon R de la sphère.

(2) Par exemple, nous ne pouvons définir une circonférence « le lieu des points d'un plan situés à une distance donnée d'un point donné de ce plan », sans avoir défini antérieurement les notions de *distance*, de *plan*, de *lieu géométrique*.

est alors rempli par les propriétés en question, que l'on admet sans démonstration. C'est ainsi que nous avons procédé pour la ligne droite, laquelle n'a point reçu de définition proprement dite, mais dont nous avons donné ce qu'on peut appeler une définition *indirecte*, en en admettant les propriétés fondamentales.

301. Seulement, il importe que les propriétés ainsi admises soient en nombre suffisant pour *caractériser* la notion qu'elles définissent, c'est-à-dire pour la distinguer de toute notion différente. Par exemple, nous aurions mal défini la ligne droite si, au lieu d'admettre, comme nous l'avons fait :

1° Que toute figure égale à une ligne droite est une ligne droite ; et qu'inversement, deux droites sont superposables d'une infinité de façons ;

2° Que, par deux points, il passe une ligne droite et une seule,

nous avions admis la première propriété, mais non la seconde. Cette première propriété n'est pas, en effet, particulière aux lignes droites : elle appartient également, par exemple, aux cercles de 1 mètre de rayon. Il nous aurait donc été impossible de démontrer, en partant de cette définition incomplète, aucune propriété des lignes droites qui ne leur soit pas commune avec les cercles en question : par exemple, nous n'aurions pas pu établir que la somme de deux angles d'un triangle est plus petite que deux droits, car cela n'a pas toujours lieu pour les triangles curvilignes formés d'arcs empruntés à des circonférences égales.

302. Toute la géométrie repose sur une notion fondamentale, celle de *déplacement*, que nous avons introduite au n° **2**. Nous avons, en cet endroit, considéré comme claire par elle-même, l'idée d'une figure qu'on déplace sans en changer la forme ni la grandeur, autrement dit, de ce que nous avons appelé une *figure invariable*. Essayons d'étudier comment cette notion est définie par ses propriétés.

Étant donnés une figure qui subit un déplacement et un point M quelconque, nous pouvons imaginer que ce point soit invariablement lié à la figure et entraîné avec elle dans son mouvement, de sorte qu'il vienne occuper une certaine position M'. On peut donc dire qu'à chaque point M de l'espace, le déplacement fait correspondre un point M', la nouvelle position où est transporté le point M. Un déplacement est donc une *transformation ponctuelle* (1) de l'espace.

D'ailleurs, c'est une propriété évidente de la notion qui nous occupe, que deux déplacements, effectués successivement, équivalent à un déplacement unique. Autrement dit, *ces transformations forment un groupe* (1).

Nous pourrons donc dire :

Une figure invariable est une figure à laquelle on ne fait subir que les

(1) Voir note A, nos **287**, **291** et suiv.

transformations d'un certain groupe (*dit groupe des déplacements*), *possédant les propriétés suivantes :*

(I)
Il existe une infinité de transformations du groupe par lesquelles on peut amener un point quelconque A *en une position quelconque* A′.
Il n'existe pas, en général, de transformation du groupe capable d'amener à la fois deux points donnés A, B *respectivement en deux positions données* A′, B′ *; il faut, pour que cette transformation existe, qu'une certaine quantité, qui dépend de* A *et de* B, *soit égale à la quantité analogue formée avec* A′, B′.
S'il y a une transformation du groupe amenant deux points déterminés A, B *respectivement en deux points déterminés* A′, B′, *il y en a une infinité. En particulier, il existe une infinité de transformations qui laissent fixes deux points* A, B, *mais, dans toutes ces transformations, il y a une infinité d'autres points qui restent fixes. Ces points forment une ligne unique, indéfinie* (*appelée* ligne droite). *Par deux points, il passe une ligne droite et une seule ;*
Il existe des surfaces (*appelées* plans), *telles que toute droite qui a deux points sur l'une d'elles y soit contenue tout entière ; par trois points quelconques de l'espace, il passe une telle surface ; etc* (1).

303. Il est toutefois essentiel d'observer que la définition précédente, comme toutes les autres définitions indirectes, implique un axiome; elle suppose manifestement le suivant :

Axiome (A) : *Il existe un groupe possédant les propriétés* (I).

On remarquera aussi que les notions de *ligne droite* et de *plan*, dérivent de celle de déplacement, sans laquelle on ne peut les définir.

304. Euclidiens et non-euclidiens sont d'accord pour attribuer au groupe des déplacements les propriétés (I) et, par conséquent, pour admettre l'axiome (A). Ils sont divisés par la question de savoir si l'énoncé

(II) *Par un point extérieur à une droite, on ne peut mener qu'une parallèle à la droite*

est exact ou non.

D'après ce qui précède, cet énoncé exprime une propriété du groupe des déplacements, puisque la ligne droite et le plan sont définis à l'aide de ce groupe, de sorte que la question prend la forme suivante :

Le groupe des déplacements, défini par les propriétés (I), *possède-t-il la propriété* (II) ?

Or, si nous avons constaté qu'il est impossible de résoudre cette question,

(1) Nous ne prétendons pas énumérer ici toutes les propriétés qui servent de définition à la notion de déplacement. Par « propriétés (I) », il faut entendre toutes celles que nous avons admises dans le Ier livre, antérieurement au Postulatum d'Euclide.

cela tient uniquement à ce qu'*elle est mal posée*, à ce qu'elle n'a pas de sens précis.

En effet, le groupe des déplacements *n'est pas* bien défini par les propriétés (I). Si (conformément à l'axiome (A), que nous admettons), il existe un groupe possédant ces propriétés, *il en existe une infinité*. Les êtres imaginaires dont l'existence est supposée par M. Poincaré, entendraient par « figures invariables » tout autre chose que nous, puisque les objets qu'ils déplaceraient se dilateraient ou se contracteraient à leur insu; cependant le groupe des déplacements, tel qu'ils le concevraient, satisferait aux conditions (I) dans tout l'intérieur de la sphère S (c'est-à-dire dans tout l'espace, infini pour eux, auquel se rapporteraient leurs raisonnements).

La solution de la question est dès lors tout indiquée. L'énoncé (II) sera exact si, parmi tous les groupes qui possèdent les propriétés (I), on réserve le nom de *groupe des déplacements* à un groupe satisfaisant à la condition exprimée par cet énoncé; autrement dit, si *l'on définit ce groupe, non plus par la propriété* (I), *mais par les propriétés* (I) *et* (II).

305. Toutefois, il reste une objection à lever. De même que la définition primitive impliquait l'axiome (A), celle que nous proposons actuellement n'est possible qu'après résolution de la question suivante :

Existe-t-il un groupe qui satisfasse à la fois aux conditions (I) *et* (II)?

La réponse est affirmative. On démontre [en admettant, bien entendu, l'axiome (A)], que, parmi les groupes, en nombre infini, qui vérifient les premières conditions, il y en a de *non-euclidiens* (pour lesquels le Postulatum d'Euclide est faux) et il y en a d'*euclidiens* (pour lesquels il est vrai).

Dès lors, toute difficulté est écartée. *Le Postulatum d'Euclide fait partie de la définition des notions fondamentales sur lesquelles repose la géométrie.*

306. Devons-nous dire, en conséquence, qu'il n'y a pas lieu de se demander si ce Postulatum est vrai ou faux, qu'une telle question est absolument dénuée de sens?

Nous en aurions le droit, si nous étions libres de définir tout à fait arbitrairement les notions de la géométrie.

Mais il n'en est pas ainsi : ces notions nous sont données par l'expérience. L'idée de figure invariable nous est suggérée par les figures invariables dont la nature nous offre l'exemple, à savoir les corps solides en présence desquels nous nous trouvons. C'est à l'image de ceux-ci que doivent être définies les figures invariables de la géométrie, si l'on veut que celle-ci s'applique aux objets réels; et les déplacements géométriques devront être aussi analogues que possible aux déplacements que l'on peut faire subir à ces corps solides.

307. On voit donc qu'il existe bien une question du Postulatum d'Euclide : c'est celle de savoir si la définition donnée ci-dessus est en

harmonie avec l'expérience; si les propriétés des déplacements *naturels*, des déplacements que nous observons, sont ou non analogues aux propriétés d'un groupe euclidien.

Seulement ce n'est plus là un problème proprement mathématique : la solution d'une telle question ne relève plus du raisonnement, mais bien de l'observation.

Or, si nous avons été conduits à développer la conception d'Euclide et non celle de Lobatschefski, c'est que précisément nos sens, dans la limite où ils nous renseignent, nous montrent le Postulatum comme sensiblement exact. Nous constatons que deux droites parallèles à une même troisième, sont parallèles entre elles; nous constatons qu'il existe des figures semblables avec des rapports de similitude quelconques; qu'il existe des rectangles, etc.

308. Mais on peut ne pas se contenter de cette vérification grossière, et soumettre la question à un examen plus approfondi. On peut, en particulier, évaluer, avec toute la précision que comportent nos instruments d'optique, les angles d'un triangle, pour rechercher si leur somme est égale à deux droits. On doit choisir, à cet effet, un triangle aussi grand que possible, puisque c'est dans ces conditions que la discordance entre les deux hypothèses est le plus accusée. En opérant ainsi, on constate que l'égalité en question est bien vérifiée (ou du moins que l'écart est inférieur aux erreurs d'observation).

Nous sommes donc autorisés à dire que la géométrie qui représente le plus fidèlement la réalité, est la géométrie euclidienne ou, du moins, en diffère très peu (c'est-à-dire que la constante k correspondante est très grande; ou que, si la géométrie en question est comparable à celle des êtres fictifs imaginés par M. Poincaré et qui se meuvent dans une sphère de rayon R, ce rayon R est énorme par rapport à toutes les longueurs dont nous avons à nous occuper); l'écart est assez faible pour ne pouvoir être mis en évidence dans le domaine de nos observations et avec l'aide des instruments les plus perfectionnés dont nous disposions.

En un mot, non seulement nous avons, théoriquement, le droit d'adopter la géométrie euclidienne, mais encore *cette géométrie est physiquement vraie*.

NOTE C

SUR LE PROBLÈME DES CERCLES TANGENTS

309. Ainsi qu'il a été dit au n° **236**, la méthode indiquée par Gergonne, pour trouver les cercles tangents à trois cercles donnés, ne s'applique pas à tous les cas possibles : elle ne donne aucun résultat lorsque les trois centres sont en ligne droite. Nous avons ajouté que l'on ferait disparaître cet inconvénient en présentant la solution sous une forme telle que les propriétés qui y figurent ne changent pas par une inversion quelconque. C'est ce que nous proposons de faire actuellement.

Soient encore A, B, C les trois cercles donnés. Prenons l'antihomologue b d'un point quelconque a du cercle A, par rapport à un centre de similitude S_{12} des cercles A, B ; et l'antihomologue c du point A, par rapport à un centre de similitude S_{13} des cercles A, C. Le cercle σ qui passe par les points a, b, c, coupe les trois cercles donnés en trois nouveaux points a', b', c'; il les coupe tous trois sous le même angle (**227**), de sorte que les points a', b' sont antihomologues par rapport au centre de similitude S_{12}, les points a', c' par rapport à S_{13}; et que, de plus, les points b', c'; c', b' sont antihomologues deux à deux par rapport à un centre de similitude S_{23} des cercles B, C.

En substituant au point a un autre point a_1 du cercle A, on obtiendrait un autre cercle σ_1 analogue à σ. Le point S_{12} a, par rapport aux cercles σ, σ_1, la même puissance (celle de l'inversion qui transforme A en B) ; il en est de même pour le point S_{13}. Donc l'axe radical xy des cercles σ, σ_1 est un axe de similitude des cercles donnés; et il est clair, dès lors, que le centre de similitude S_{23}, dont il a été question tout à l'heure, est celui qui se trouve, avec les deux premiers, sur ce même axe similitude [1].

310. Nous voyons ainsi qu'il y a quatre séries de cercles σ (correspondant aux quatre axes de similitude) et que les cercles d'une même série ont même axe radical. Inversement, tout cercle qui a, avec deux cercles σ,

(1) Le raisonnement suppose, il est vrai, que le point S_{23} est le même pour σ et pour σ_1. Mais, dans le cas contraire, l'un au moins des deux points S_{23} qui correspondent à σ et à σ_1, par exemple celui correspond à σ_1, serait en ligne droite avec S_{12} et S_{13}; il aurait donc, par rapport au cercle σ_1, la même puissance que par rapport à σ, c'est-à-dire celle de l'inversion qui transforme B en C. Donc le cercle σ_1 couperait aussi B et C en des points qui se correspondraient deux à deux dans cette inversion.

d'une même série, même axe radical, appartient à la série (puisqu'il se correspond à lui-même dans les deux inversions de pôles S_{12} et S_{13}) ; de sorte que cette série est déterminée par deux de ses cercles, ou par l'axe xy et l'un d'eux. On peut, en général, prendre pour ce dernier le cercle σ_0, orthogonal aux trois cercles donnés, lequel appartient aux quatre séries (**227** *bis*).

Le lieu des centres des cercles d'une série est la perpendiculaire abaissée du centre radical des cercles A, B, C sur un de leurs axes de similitude.

311. Les cercles tangents aux cercles donnés appartiennent évidemment aux séries dont nous venons de parler; et, inversement, tout cercle σ qui est tangent à l'un des cercles donnés est tangent aux deux autres.

Le problème des cercles tangents est donc ramené au suivant :

Trouver un cercle ayant, avec deux cercles donnés σ et σ_1, même axe radical, et tangent à un troisième cercle donné A. (*fig*. 223).

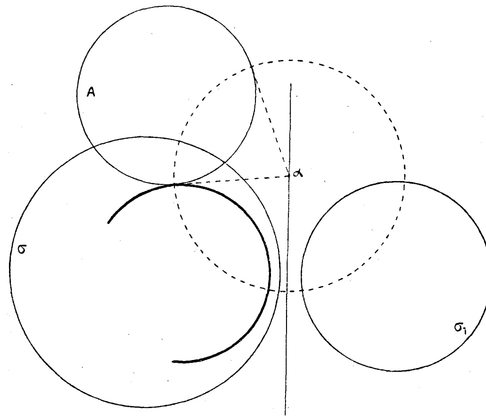


Fig. 223.

Or cette dernière question se résout sans difficulté : si a est le point de contact du cercle cherché et du cercle A, le cercle passant par ce point et coupant à angle droit σ et σ_1, sera aussi orthogonal au cercle cherché et, par suite, à A : ce qui le fera connaître (**158**, Const. 13). Autrement dit, il suffira de mener, par le centre radical α des cercles σ, σ_1 et A, une tangente au cercle A, pour obtenir le point de contact cherché. Inversement, on reconnaîtra que les points ainsi obtenus correspondent à des solutions de la question.

On peut, comme nous l'avons remarqué, remplacer un des cercles σ, σ_1 par leur axe radical xy, de sorte que la solution du problème des cercles tangents devient la suivante :

Par un point du cercle A *et ses deux antihomologues, faites passer un cercle σ. La corde commune à ce cercle et au cercle* A *coupe l'axe de similitude xy en un point α, par lequel il suffira de mener les tangentes à* A *pour obtenir les points de contact de ce cercle avec les cercles cherchés.*

312. Lorsqu'on prend pour σ le cercle σ_0 qui a pour centre le centre

radical I des trois cercles donnés et les coupe tous trois à angle droit, on retombe sur la solution de Gergonne. Les points communs des cercles A et σ_0 sont en effet les points de contact des tangentes menées de I à A, de sorte que la corde commune des deux cercles est la polaire du point I, par rapport à A. Le point α, intersection de cette droite avec xy, a donc bien pour polaire la droite qui joint le point I au pôle de xy.

On conçoit, dès lors, pourquoi cette solution est en défaut lorsque les centres des cercles donnés sont en ligne droite. C'est que le cercle σ_0 et la droite xy coïncident alors tous deux avec la ligne des centres. Il suffira, d'ailleurs, pour tourner la difficulté, d'employer, comme nous l'avons dit, un cercle σ différent de σ_0.

La méthode actuelle offre également, sur celle de Gergonne, l'avantage de s'appliquer lorsqu'un ou plusieurs des cercles donnés sont remplacés par des points ou des droites, en donnant directement les points de contact avec l'une quelconque des droites : ceux-ci sont situés sur une circonférence ayant pour centre le point d'intersection de la droite donnée avec l'axe de similitude xy et coupant à angle droit le cercle σ_1 : construction qui généralise évidemment la constr. 14 (n° **159**). Cette construction s'applique lors même qu'il ne reste plus aucun cercle, ce qui n'a pas lieu pour la solution de Gergonne. Elle n'est en défaut que pour le cas où les trois cercles sont remplacés par trois points.

NOTE D

SUR LA NOTION D'AIRE

313. Nous avons suivi, dans le IVe livre de cet ouvrage, la marche usitée généralement et dans laquelle on admet *a priori* (**243**) que l'on peut définir les aires des polygones, c'est-à-dire faire correspondre à chaque polygone plan un nombre (appelé aire) possédant les propriétés.

I. *Deux polygones égaux ont la même aire, quelles que soient leurs situations dans l'espace ;*

II. *Le polygone* P'', *somme de deux polygones adjacents* P, P', *a pour aire la somme des aires de* P *et de* P'.

La possibilité d'une pareille correspondance constitue, dans cette théorie, un *postulatum*. Or ce postulatum est inutile : le fait en question n'est en

aucune façon supposé, mais bien démontré dans la méthode suivante qui doit être, pour cette raison, préférée à l'ancienne.

314. Théorème. — *Dans tout triangle, le produit d'un côté par la hauteur correspondante est le même, quel que soit le côté choisi.*

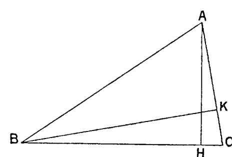


Fig. 224.

Soit le triangle ABC (*fig.* 224), dans lequel les hauteurs correspondant aux côtés BC, CA sont respectivement AH, BK. Les triangles rectangles ACH, BCK ont l'angle en C commun : ils sont donc semblables et donnent

$$\frac{AH}{AC} = \frac{BK}{BC}, \text{ ou } BC.AH = AC.BK.$$

C. Q. F. D.

Nous appellerons *aire* du triangle le produit précédent, multiplié par un nombre déterminé k, pris une fois pour toutes et sur le choix duquel nous reviendrons tout à l'heure. Cette aire est nulle lorsque le triangle cesse d'exister, à proprement parler, ses trois sommets se trouvant en ligne droite ; et alors seulement.

Les aires de deux triangles qui ont même hauteur sont proportionnelles à leurs bases.

Il est clair que deux triangles égaux ont la même aire.

315. Considérons, d'autre part, un point quelconque O dans le plan d'un triangle; en joignant ce point aux trois sommets, nous formerons trois triangles ayant pour bases les différents côtés et pour sommet commun, le point O. L'un quelconque de ses triangles sera dit *additif* (par exemple, le triangle OBC, fig. 228), s'il est du même côté que le triangle donné, par rapport à la base commune ; *soustractif* (par exemple, le triangle OBC. *fig.* 229) dans le cas contraire (¹).

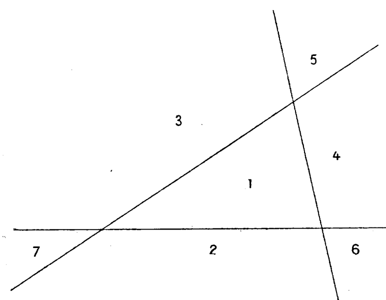


Fig. 225.

Théorème. — *Un point quelconque O étant pris dans le plan d'un triangle et joint aux trois sommets, la somme des aires des triangles additifs, diminuée de la somme des aires des triangles soustractifs (s'il en existe), est égale à l'aire du triangle primitif.*

Les côtés du triangle donné divisent le plan en sept régions (*fig.* 225); une intérieure ; trois (2-4, fig. 225) séparées de la première

(1) Si l'on énonce les sommets du triangle donné dans un ordre déterminé quelconque, et

respectivement par les trois côtés; les trois dernières (5-7) dans les angles respectivement opposés par le sommet aux trois angles du triangle.

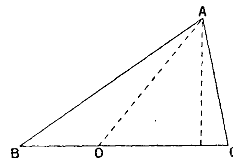


Fig. 226.

Nous distinguerons dès lors cinq cas :

1° *Le point* O *est sur l'un des côtés*. Le point O étant pris sur le côté BC du triangle ABC (*fig*. 226), il n'y a point de triangle OBC. Quant aux deux triangles OAB, OAC, ils ont bien pour somme le triangle ABC : car ces trois triangles ont même hauteur (la perpendiculaire abaissée du sommet A sur BC) et la troisième base BC est la somme des deux premières OB, OC.

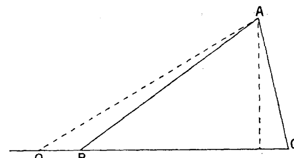


Fig. 227.

2° *Le point* O *est sur un côté prolongé*. Dans le triangle ABC, le point O étant pris sur le prolongement de BC (*fig*. 227), il n'y a point de triangle OBC. Quant aux deux triangles OAB, OAC, ils ont bien pour différence le triangle ABC : car ces trois triangles ont même hauteur, et la troisième base BC est la différence des deux premières OB, OC.

3° *Le point* O *est intérieur au triangle* (*fig*. 228).

Prolongeons la droite OA jusqu'à rencontre en I avec le côté BC. Le triangle ABC est égal (1°) à la somme des triangles ABI, ACI, lesquels peuvent eux-mêmes se décomposer respectivement en AOB + BOI, AOC + COI. Or les triangles AOB AOC sont les deux premiers triangles additifs et les triangles BOI, COI donnent, par leur ensemble, le troisième triangle additif BOC.

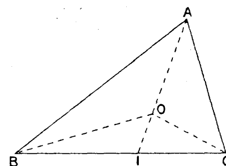


Fig. 228.

4° *Le point* O *est extérieur au triangle donné* ABC, *mais dans un de ses angles* A, par exemple (*fig*. 229). La droite OA coupant BC au point I, la somme des deux triangles additifs AOB, AOC peut être remplacée (1°) par la somme des quatre triangles AIB, AIC, OIB, OIC. Or, les deux premiers ont pour somme ABC, les deux autres OBC. On a donc

$$AOB + AOC = ABC + OBC,$$

ou

$$OAB + OAC - OBC = ABC,$$

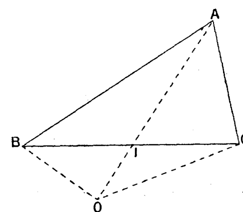


Fig. 229.

c'est-à-dire la relation demandée, puisque le triangle OBC est soustractif.

ceux d'un triangle de sommet O de manière que les sommets communs se suivent dans le même ordre, on peut encore dire que *ce dernier triangle sera additif ou soustractif, suivant qu'il aura ou non même sens de rotation que le triangle donné.*

5° *Le point* O *est dans l'opposé par le sommet d'un angle du triangle* ABC, de l'angle A, par exemple (*fig.* 230). Alors le point A est intérieur au triangle OBC, et l'on a (3°)

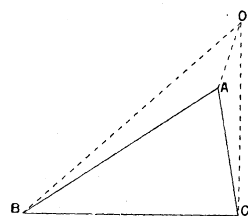


Fig. 230.

$$OBC = ABC + OAB + OAC$$

ou

$$OBC - OAB - OAC = ABC,$$

ce qui est la relation demandée, puisque le triangle OBC est additif et les deux autres soustractifs.

316. Soient maintenant un polygone quelconque ABCDE (*fig.* 231) et un point quelconque O de son plan. Joignant ce point à tous les sommets, nous formerons encore les triangles qui ont pour sommet commun O et pour bases les différents côtés, et nous considérerons chacun de ces triangles comme additif ou comme soustractif, suivant qu'il est ou non du même côté que le polygone (1), par rapport à la base commune.

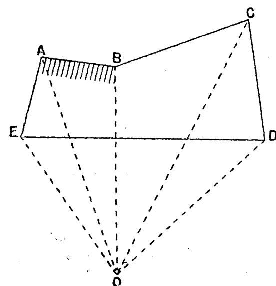


Fig. 231.

Théorème. — *Soient un polygone, décomposé d'une façon quelconque en un nombre quelconque n de triangles, et un point quelconque* O *du plan, que l'on joint à tous les sommets. La différence* S *entre la somme des aires de triangles additifs de sommet* O *et la somme des aires des triangles soustractifs* (ou la première somme, si la seconde n'existe pas) *est égale à la somme* Σ *des aires des n triangles en lesquels est décomposé le polygone.*

Si le théorème est vrai pour deux polygones adjacents P, P′ décomposés en triangles, il est vrai pour leur somme P″. On peut, en effet, distinguer, dans les contours de P et de P′, deux parties : les côtés ou segments de côtés (2) non communs, lesquels figurent dans P″, avec les triangles additifs ou soustractifs correspondants ; et les côtés ou segments de côtés communs. A ceux-ci correspondent des triangles qui sont additifs pour l'un des polygones P, P′ s'ils sont soustractifs pour l'autre (puisque les polygones P,P′ sont sités de part et d'autre de tout côté commun) et qui, par consé-

(1) Quand nous parlons de la situation du polygone, par rapport à un de ses côtés, nous entendons parler de la région qui avoisine immédiatement ce côté. Par exemple, le triangle OAB (fig. 231) est additif, parce qu'il est du même côté de AB que la partie ombrée de la figure.

(2) On devra, s'il y a lieu, diviser un côté quelconque du polygone P en segments (dont les uns seront communs avec le périmètre de P′ ; les autres non), et remplacer le triangle qui a pour sommet O et pour base ce côté, par les triangles partiels ayant pour base ces segments. On ne changera pas ainsi la quantité S, puisque ces triangles partiels ont pour somme (théor. précéd.) le triangle total. — On opérera de même pour P′ et pour P″.

quent, disparaîtront si l'on fait la somme des quantités S relatives à ces deux polygones. Cette somme donne donc bien la quantité S formée avec le polygone P''. Comme, d'autre part, la quantité Σ relative à P'' est évidemment la somme des deux quantités analogues relatives à P et à P', l'égalité de ces deux quantités a bien lieu pour le troisième polygone P'', si elle a lieu pour les deux premiers.

On peut, dès lors, considérer la démonstration comme terminée, car le théorème est démontré pour $n = 1$ (il se confond alors avec le théorème précédent); et, d'autre part, s'il est vrai pour une valeur de n, il est vrai pour la suivante (puisqu'un polygone composé de $n + 1$ triangles est la somme d'un triangle unique et d'un polygone composé de n triangles).

Corollaires. — *La quantité* S *est indépendante du choix du point* O, puisque la quantité Σ n'en dépend pas.

De même, *la quantité* Σ *est indépendante du mode de décomposition du polygone en triangles.*

317. Nous appellerons *aire* du polygone la valeur commune des deux nombres S et Σ.

Deux polygones égaux ont la même aire, puisqu'on peut les décomposer en triangles égaux chacun à chacun; d'autre part, la démonstration précédente prouve que, *quand deux polygones sont adjacents, le polygone somme a pour aire, la somme des aires des parties.*

En un mot, *les aires ainsi définies possèdent les propriétés* I *et* II.

318. Il en résulte qu'*il est impossible de décomposer un polygone en parties qui, autrement assemblées* (*de manière à être encore adjacentes les unes aux autres*), *forment un polygone intérieur au premier.*

Car ce polygone aurait nécessairement même aire que le premier.

Cette proposition n'est nullement démontrée par la théorie donnée dans le texte, puisque l'existence des aires constitue, en cet endroit, un postulatum.

319. Nous ne nous sommes pas occupés, jusqu'ici, du choix du nombre k. Il est clair que le changement de ce nombre revient à remplacer toutes les aires par des aires proportionnelles. Nous avons déjà remarqué (**244**) que cette substitution n'altère pas les deux propriétés fondamentales.

Nous allons déterminer k de manière que le carré construit sur l'unité de longueur ait une aire égale à l'unité. Or, ce carré se compose de deux triangles dont chacun a, tant pour base que pour hauteur, l'unité de longueur. Son aire est donc $2k$, de sorte que nous prendrons $k = \frac{1}{2}$; tout triangle aura alors pour aire le demi-produit de sa base par sa hauteur. Les aires ainsi déterminées coïncident, dans ces conditions, avec celles que nous avons appris à calculer dans le texte [1].

(1) Les raisonnements donnés dans le texte prouvent que la détermination des aires, telle que nous l'avons donnée, est la seule qui possède les propriétés précédentes, tout en satisfaisant à la condition que le carré construit sur l'unité de longueur ait l'unité pour aire.

PROBLÈMES DIVERS

ET PROBLÈMES PROPOSÉS DANS DIFFÉRENTS CONCOURS (¹)

343. A, B, C, D étant quatre points d'une circonférence (se suivant dans l'ordre où ils viennent d'être énumérés) on prend les milieux a, b, c, d des arcs AB, BC, CD, DA. Montrer que les droites ac, bd sont perpendiculaires.

344. Sur les côtés BC, CA, AB d'un triangle on prend trois points arbitraires D, E, F et l'on trace les circonférences AEF, BFD, CDE. Démontrer :

1° Que ces trois circonférences concourent en un même point O ;

2° Que si l'on joint un point quelconque P du plan aux sommets A, B, C du triangle, les nouveaux points a, b, c où ces droites PA, PB, PC coupent respectivement les circonférences précédentes sont sur une même circonférence passant par O et P.

345. Sur chaque côté d'un quadrilatère inscriptible, comme corde, on décrit un segment de cercle quelconque. Les quatre nouveaux points où chacune des circonférences ainsi tracées rencontre la suivante sont aussi les sommets d'un quadrilatère inscriptible.

346. Étant donné un pentagone quelconque, on circonscrit une circonférence à chacun des triangles formés par trois côtés consécutifs (prolongés s'il y a lieu). Montrer que les cinq points (autres que les sommets du pentagone) où chacune de ces circonférences rencontre la suivante sont sur un même cercle. (Ex. 106.)

347. Sur le prolongement d'un diamètre fixe d'un cercle O, on prend un point variable M, par lequel on mène une tangente au cercle. Lieu du point P pris sur cette tangente de manière que PM = MO (nº **92**).

348. D'un point M pris dans le plan d'un rectangle, on abaisse des perpendiculaires sur les côtés, la première perpendiculaire rencontrant deux côtés opposés en P, Q, la seconde rencontrant les deux autres côtés en R, S.

1° Quel que soit le point M, l'intersection H de PR et de QS est sur une droite fixe, l'intersection K de PS et QR sur une autre droite fixe.

2° L'angle $\widehat{HMK}$ a sa bissectrice parallèle à un des côtés du rectangle;

---

(1) Les exercices 349, 350, 353, 354, 384, 386, 387, 393, 394, 400, 404, 413 sont tirés de compositions données au Concours général des lycées et collèges ; les exercices 365, 374, 397, 406, 409, 412, 422, de compositions données au concours de l'Agrégation des sciences mathématiques. Nous ne nous sommes d'ailleurs pas cru obligés de reproduire exactement les énoncés tels qu'ils ont été proposés ; nous avons dû, en particulier, y apporter un certain nombre de modifications pour les mettre en harmonie avec les exercices proposés dans le courant de l'ouvrage.

3° Trouver le point M, connaissant les points H et K;

4° Ce dernier problème a deux solutions. Montrer que la circonférence qui a pour points diamétralement opposés les deux points M, M′ qui répondent à la question coupe orthogonalement le cercle circonscrit au rectangle;

5° Lieu du point M tel que PR soit perpendiculaire à QS.

349. On donne deux triangles égaux ABC, *abc*. Trouver le lieu d'un point O tel que, en faisant tourner le premier triangle autour de ce point jusqu'à ce que le côté AB prenne une position $a'b'$ parallèle à ac, la nouvelle position b' du point B soit sur la droite OC. Trouver aussi, dans ces conditions, les lieux décrits par les points a', b', c'.

350. Soient A′, B′, C′ les symétriques du point de rencontre des hauteurs d'un triangle ABC par rapport aux trois côtés BC, CA, AB. Soient encore M, N les points où la droite B′C′ coupe respectivement AC, AB; P, Q les points où la droite C′A′ coupe les côtés BA, BC; R, S les points où la droite A′B′ coupe CB, CA. Montrer que les droites MQ, NR, PS concourent en un même point.

(Ce point n'est autre que le point de rencontre des hauteurs du triangle ABC.)

351. Inscrire dans une circonférence donnée un trapèze dont on connaît la hauteur, ainsi que la somme ou la différence des bases.

352. Soient AB un diamètre d'une circonférence, CMD une circonférence de centre A, qui coupe la première en C, D et dont M est un point quelconque; N, P, Q les points où les droites BM, CM, DM coupent respectivement la première circonférence:

1° MPBQ est un parallélogramme;

2° MN est moyen proportionnel entre NC et ND.

353. On donne un triangle isoscèle OAB (OA = OB). Du sommet O comme centre, on décrit une circonférence de rayon variable à laquelle on mène, des points A et B respectivement, deux tangentes qui ne se coupent pas sur la hauteur du triangle.

1° Lieu du point d'intersection M de ces deux droites.

2° Montrer que le produit MA. MB est égal à la différence des carrés de OM et de OA;

3° Trouver le lieu du point I, extrémité d'une longueur égale à MA, prise à partir du point M sur MB.

354. Sur la base BC d'un triangle donné quelconque ABC, on prend un point quelconque D, et l'on circonscrit, aux deux triangles ABD, ACD, deux circonférences dont les centres sont O, O′.

1° Montrer que le rapport des rayons de ces circonférences est constant;

2° Déterminer la position que doit occuper le point D pour que ces rayons soient le plus petits possible;

3° Montrer que le triangle AOO′ est semblable au triangle ABC;

4° Trouver le lieu du point M qui partage la droite OO′ dans un rapport donné; examiner le cas où ce point est la projection du sommet A sur OO′.

355. Autour d'un point commun à deux circonférences, on fait pivoter un angle

de grandeur constante, dont les côtés coupent respectivement les circonférences en M, M'. Lieu du point qui divise MM' dans un rapport donné. — Plus généralement, lieu du sommet d'un triangle semblable à un triangle donné, construit sur MM' comme base.

356. Si cinq droites A, B, C, D, E sont telles que deux d'entre elles, A, B, par exemple, sont divisées proportionnellement par les trois autres, deux quelconques d'entre elles sont divisées proportionnellement par les trois autres. (La démonstration doit distinguer deux cas, suivant que, parmi les deux nouvelles droites auxquelles on se propose de l'appliquer, se trouve ou non l'une des deux anciennes.)

357. Soient a, b, c les côtés d'un triangle; x, y, z les distances d'un point du plan à ces côtés. Si ce point est sur le cercle circonscrit, l'un des rapports $\frac{a}{x}$, $\frac{b}{y}$, $\frac{c}{z}$ est égal à la somme des deux autres. — Réciproque.

358. C étant un point pris sur un segment de droite AB, trouver le lieu des points communs à une circonférence variable passant par A, B et à la droite qui joint le point C au point de concours des tangentes menées en A, B à cette circonférence.

359. Parmi tous les triangles inscrits dans un triangle donné, quel est celui qui a le périmètre minimum ?

360. Inscrire, dans un quadrilatère donné ABCD, un quadrilatère MNPQ de périmètre minimum. Montrer que le problème n'a pas de solutions proprement dites (c'est-à-dire qui soient de véritables quadrilatères) en dehors du cas où le quadrilatère donné est inscriptible.

Mais si le quadrilatère ABCD est inscriptible, il existe une infinité de quadrilatères MNPQ ayant tous le même périmètre, plus petit que celui de tout autre quadrilatère inscrit à ABCD. Ce périmètre est une quatrième proportionnelle au rayon du cercle ABCD et aux diagonales AC, BD.

Quelle condition doit, en outre, remplir le quadrilatère ABCD pour que les différents quadrilatères MNPQ ainsi trouvés soient eux-mêmes inscriptibles ? Trouver, dans ce cas, le lieu des centres des cercles qui leur sont circonscrits.

361. Les rayons des cercles circonscrits (ex. 66) aux quadrilatères formés, l'un par les bissectrices des angles d'un quadrilatère déterminé, l'autre par les bissectrices de ses angles extérieurs, sont entre eux dans le rapport $\frac{a+c-b-d}{a+c+b+d}$ (a, b, c, d étant les quatre côtés du quadrilatère donné, pris dans leur ordre naturel).

362. On prolonge, jusqu'à leur rencontre en E, F, les côtés opposés d'un quadrilatère inscriptible, et on mène les bissectrices des angles ainsi obtenus. Montrer :

1° Que ces droites se coupent sur le segment qui joint les milieux des diagonales du quadrilatère donné, et divisent ce segment dans un rapport égal à celui de ces diagonales ;

2° Qu'elles sont aussi les bissectrices des angles sous lesquels on voit ce segment des deux points E, F ;

3° Qu'elles coupent les côtés de ce quadrilatère en quatre points (autres que E, F)

qui sont les sommets d'un losange. Les côtés de ce losange sont parallèles aux diagonales du quadrilatère donné; leur longueur est une quatrième proportionnelle à ces diagonales et à leur somme;

4° Donner des énoncés analogues pour les bissectrices des angles formés par deux côtés opposés prolongés, l'un jusqu'au point de rencontre, l'autre au delà du point de rencontre.

5° Montrer que la troisième diagonale EF d'un quadrilatère inscriptible est à la droite qui joint les milieux des deux premières comme le double produit de celles-ci est à la différence de leurs carrés. Calculer cette troisième diagonale, connaissant les côtés du quadrilatère.

363. Montrer que le point obtenu dans l'exercice 105, lorsqu'il est intérieur au triangle, est tel que la somme de ses distances aux trois sommets soit la plus petite possible. (Ex. 269.) — Évaluer cette somme (son carré est égal à la demi-somme des carrés des trois côtés, augmentée du produit de la surface par $2\sqrt{3}$).

Qu'arrive-t-il si le point en question est extérieur au triangle?

(Cette circonstance se produit lorsqu'un des angles de celui-ci, $\widehat{A}$ par exemple, est plus grand que 120°. Le théorème de Ptolémée donne le rapport de la somme AB + AC au segment AI intercepté par le cercle circonscrit sur la bissectrice de l'angle A, rapport qui est alors inférieur à 1. En appliquant de même le théorème n° **238** au quadrilatère AMBI, on verra que la somme MA + MB + MC est minimum quand le point M est en A.)

364. Plus généralement, trouver un point tel que ses distances aux trois sommets d'un triangle donné ABC, multipliées respectivement par trois nombres positifs donnés, donnent une somme minimum. — On suppose qu'avec trois longueurs proportionnelles aux nombres donnés, on peut former un triangle.

(Soient T ce triangle; α, β, γ ses angles. On fera en A, avec les côtés AB, AC respectivement, deux angles BAC′, CAB′ égaux à α; en B, avec les côtés BC, BA, deux angles CBA′, ABC′ égaux à β; en C, avec les côtés CA, CB, deux angles ACB′, BCA′ égaux à γ : le tout extérieurement au triangle ABC. Les droites AA′, BB′, CC′ se coupent en un même point O, qui est le point cherché s'il est intérieur au triangle donné. — Dans le cas contraire, et aussi dans le cas où les trois nombres donnés ne sont pas proportionnels aux côtés d'un triangle, le minimum a lieu en un sommet du triangle ABC.)

365. On divise chaque côté d'un triangle en segments proportionnels aux carrés des côtés adjacents et on joint le point de division au sommet correspondant.

Montrer :

1° Que les droites ainsi obtenues concourent en un même point;

2° Que ce point est celui que l'on obtiendrait dans l'exercice 197, en prenant pour le point O le centre de gravité du triangle;

3° Que ce point est le centre de gravité du triangle PQR formé par ses projections sur les côtés du triangle primitif.

366. Inscrire, dans un triangle donné, un triangle tel que la somme des carrés de ses côtés soit minimum. (On admettra que le minimum existe et on montrera qu'il ne peut avoir lieu que pour le triangle PQR de l'exercice précédent.)

On en conclura que le point O′, étudié dans l'exercice précédent, est celui

dont la somme des carrés des distances aux trois côtés est la plus petite (ex. 137, 140).

Plus généralement, inscrire dans un triangle donné un triangle tel que les carrés de ses côtés, multipliés respectivement par des nombres donnés, donnent la plus petite somme possible.

367. Inscrire, dans une circonférence donnée, un triangle tel que la somme des carrés de ses côtés, multipliés respectivement par des nombres donnés, soit la plus grande possible.

368. La condition nécessaire et suffisante pour que le problème qui fait l'objet de l'exercice 127 (point dont les distances aux trois sommets d'un triangle ABC soient proportionnelles à trois nombres donnés m, n, p) ait une solution, est que l'on puisse construire un triangle dont les côtés soient mesurés respectivement par les quantités $m.\mathrm{BC}$, $n.\mathrm{CA}$, $p.\mathrm{AB}$.

369. Des sommets A, B, C d'un triangle aux côtés opposés, soient menées trois droites AD, BE, CF égales entre elles. Si, par un point quelconque O intérieur au triangle, on mène des parallèles à ces droites, jusqu'à rencontre avec les côtés correspondants, la somme des segments ainsi interceptés sur ces parallèles à partir du point O est constante, quel que soit ce point.

370. Lorsque trois droites passent par un même point, il existe toujours des nombres tels que la distance d'un point quelconque du plan à l'une d'elles soit égale à la somme ou à la différence des distances du même point aux deux autres, multipliées par ces nombres. — Rendre le résultat entièrement indépendant de la position du point par une convention convenable de signes.

Inversement, la somme ou la différence des distances d'un point quelconque M du plan à deux droites fixes, multipliées respectivement par des nombres donnés, est proportionnelle à la distance du point M à une certaine droite fixe, passant par le point d'intersection des premières.

371. Trouver le lieu des points tels que la somme de leurs distances à n droites données, prises avec des signes convenables et multipliées par des nombres donnés quelconques, soit constante; ou, en d'autres termes, le lieu des points tels que les aires des triangles qui ont pour sommet un d'eux et pour base n segments donnés aient une somme algébrique constante. (L'exercice précédent donne le moyen de résoudre le problème pour une valeur de n, si on sait le résoudre pour la valeur précédente.)

Conclure de là que les milieux des trois diagonales d'un quadrilatère complet sont en ligne droite.

371 *bis*. Les trois cercles qui ont pour diamètres les diagonales d'un quadrilatère complet ont même axe radical. — Cet axe radical passe par les points de rencontre des hauteurs des quatre triangles que forment les côtés du quadrilatère, pris trois à trois.

372. Les côtés opposés et les diagonales d'un quadrilatère quelconque forment trois angles tels que les polaires d'un point O quelconque du plan par rapport à chacun d'eux sont concourantes. (Transformer par polaires réciproques, en prenant le point O comme centre du cercle directeur.)

Ces mêmes droites interceptent sur une transversale quelconque trois segments tels que le segment qui divise harmoniquement d'eux d'entre eux divise harmoniquement le troisième.

Trois segments jouissant de cette propriété sont dits *en involution.*

373. La droite de Simson (ex. 72) qui joint les pieds des perpendiculaires abaissées sur les trois côtés d'un triangle, d'un point P pris sur le cercle circonscrit, divise en deux parties égales la droite qui joint ce point au point de concours H des hauteurs du triangle.

(On démontrera, en utilisant l'exercice 70, que les symétriques du point P par rapport aux trois côtés sont sur une même droite passant par H.)

Déduire de là et de l'exercice 106 que les points de concours des hauteurs des quatre triangles que forment quatre droites prises trois à trois sont en ligne droite.

374. Le point de concours M des droites de Simson relatives à un triangle ABC inscrit dans un cercle S et à deux points P, P′ de ce cercle décrit un cercle S′ lorsque le point C décrit le cercle S (les points A, B, P, P′ restant fixes).

Trouver le lieu du centre du cercle S′ lorsque les points A, B restent fixes pendant que les points P, P′ se déplacent sur le cercle S en restant à une distance constante l'un de l'autre.

Trouver aussi le lieu décrit par le point M lorsque (A, B, C restant fixes) les points P et P′ varient en restant diamétralement opposés l'un à l'autre.

375. Quel est le lieu des milieux des côtés d'un triangle inscrit à un cercle fixe et dont le point de concours des hauteurs reste fixe ?

376. On transforme le cercle des neuf points (ex. 101) d'un triangle par l'inversion qui a pour pôle le milieu d'un côté et pour puissance la puissance du pôle par rapport au cercle inscrit, ou, ce qui revient au même (ex. 90 *bis*), au cercle ex-inscrit correspondant au côté choisi. Montrer que la droite transformée n'est autre que la tangente commune à ces deux derniers cercles (autre que les côtés du triangle).

Il résulte de là que le cercle des neuf points est tangent au cercle inscrit et aux cercles ex-inscrits.

377. Entre le rayon R, r du cercle circonscrit et du cercle inscrit à un triangle, et la distance d de leurs centres existe la relation

$$d^2 = R^2 - 2\,Rr.$$

(Utiliser ex. 103 et n° **126.**)

Réciproquement, si entre les rayons de deux cercles et la distance de leurs centres existe la relation précédente, on peut inscrire à l'un une infinité de triangles circonscrits à l'autre.

Obtenir des résultats analogues en remplaçant le cercle inscrit par un cercle ex-inscrit.

378. Dans tout triangle ABC :

1° La droite qui joint la projection du sommet B sur la bissectrice de l'angle $\widehat{C}$ à la

projection du sommet C sur la bissectrice de l'angle $\widehat{B}$ n'est autre que la corde qui joint les points de contact E, F (fig. 91, ex. 90 *bis*) du cercle inscrit avec les côtés AC, AB ;

2° La droite qui joint la projection du sommet B sur la bissectrice de l'angle $\widehat{C}$ a la projection du sommet C sur la bissectrice de l'angle extérieur en B n'est autre que la corde de contact E_3F_3 du cercle ex-inscrit de l'angle C avec les mêmes côtés ;

3° La droite qui joint la projection du sommet B sur la bissectrice de l'angle extérieur en C à la projection du sommet C sur la bissectrice de l'angle extérieur en B n'est autre que la corde de contact E_1F_1 du cercle ex-inscrit dans l'angle $\widehat{A}$ avec ces mêmes côtés ;

4° Les projections du point A sur les bissectrices des angles intérieurs et extérieurs en B et sur les bissectrices des angles intérieurs et extérieurs en C sont sur une même parallèle à BC, à des distances successives égales à $p - c$, $p - a$, $p - b$;

5° En projetant le sommet de chacun des angles $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ du triangle sur les bissectrices des angles extérieurs non adjacents, on a six points qui appartiennent à une même circonférence (revient à l'exercice 102). Cette circonférence coupe orthogonalement les cercles ex-inscrits au triangle donné. Son centre est celui du cercle inscrit au triangle A′B′C′ qui a pour sommets les milieux des côtés de ABC ; son rayon, égal à l'hypoténuse du triangle rectangle qui a pour côtés de l'angle droit le rayon de ce cercle inscrit et le demi-périmètre du triangle A′B′C′. — Il existe trois autres circonférences analogues, dont chacune passe par deux projections sur bissectrices extérieures et quatre projections sur bissectrices intérieures.

379. On joint entre eux les points de contact de chacun des cercles ex-inscrits au triangle ABC avec les côtés de l'angle dans lequel ce cercle est ex-inscrit. Montrer que les trois cordes de jonction forment un triangle dont les sommets sont respectivement sur les hauteurs du premier, et dont le cercle circonscrit a pour centre le point de concours de ces hauteurs.

380. Connaissant le point O homologue à lui-même (n° **150** *bis*) dans deux figures semblables et de même sens F, F′, ainsi qu'un triangle T semblable à celui que forme ce point O avec deux points homologues quelconques (même numéro) ; connaissant de même le point O′ homologue à lui-même dans les figures semblables et de même sens F′, F″ ainsi qu'un triangle T′ semblable à celui que forme O′ avec deux points homologues quelconques de ces deux dernières figures : construire le point homologue à lui-même dans les figures F, F″ et un triangle semblable à celui que forme ce point avec deux points homologues quelconques des figures F, F″.

381. Construire un polygone, connaissant les sommets de triangles ayant pour bases ses différents côtés et respectivement semblables à des triangles donnés.

(L'exercice précédent permet de réduire le problème relatif à un polygone d'un nombre déterminé de côtés à celui qui est relatif à un polygone ayant un côté de moins ; et on peut opérer ainsi jusqu'à ce qu'on n'ait plus que deux sommets à déterminer).

Dans quels cas le problème est-il impossible ou indéterminé ?

382. Soient ABC un triangle ; O, a, b, c quatre points quelconques. Sur BC comme base, on construit un triangle BCA′ semblable au triangle bcO, avec le même sens de rotation (B, C étant respectivement homologues à b, c) ; sur CA comme base, un

triangle CAB′ semblable à caO ; sur AB comme base un triangle ABC′ semblable à abO. Montrer que le triangle A′B′C′ est semblable, avec inversion dans le sens de rotation, à celui qui a pour sommets les inverses des points a, b, c par rapport à O pris comme pôle.

383. Sur deux segments de droites donnés, on décrit deux segments de cercle capables d'un même angle quelconque V. Montrer que, lorsque V varie, l'axe radical des deux circonférences ainsi tracées tourne autour d'un point fixe ; les triangles formés en joignant ce point aux extrémités de chacun des segments donnés sont équivalents et ont même angle en leur sommet commun.

384. Un quadrilatère ABCD est tel que deux côtés adjacents AD, AB sont égaux ainsi que les deux autres côtés CB, CD. Prouver que ce quadrilatère est circonscriptible à deux cercles. Trouver les lieux décrits par les centres de ces cercles lorsque le quadrilatère est articulé [1], un des côtés restant fixe.

385. Plus généralement, un quadrilatère ABCD, circonscriptible à un cercle, est articulé, le côté AB restant fixe ; dans ces conditions, il reste circonscriptible (ex. 87). Trouver le lieu du centre du cercle inscrit.

(En supposant, pour fixer les idées, ce cercle intérieur au polygone, on portera sur AB les longueurs $AE = AD$, $BF = BC$ et en tenant compte de l'exercice 89, on sera ramené à l'exercice 257.)

386. Étant donnés quatre points A, B, C, D sur un même cercle, on prend un point quelconque P dans le plan et on décrit les circonférences PAB, PCD qui se coupent en un second point Q. Trouver le lieu du point Q lorsque le point P décrit une droite ou un cercle. Trouver le lieu sur lequel doit se trouver le point P pour qu'il coïncide avec le point Q.

387. On joint les sommets A, B, C, D d'un carré à un point quelconque P du plan ; les droites ainsi tracées coupent le cercle circonscrit au carré en quatre nouveaux points A′, B′, C′, D′. Montrer que, dans le quadrilatère A′B′C′D′, les produits des côtés opposés sont égaux : $A'B' \times C'D' = A'D' \times B'C'$.

Inversement, A′B′C′D′ étant un quadrilatère inscrit dans lequel les produits des côtés opposés sont égaux, trouver un point P tel que les droites PA′, PB′, PC′, PD′ coupent le cercle circonscrit aux sommets d'un carré.

(Cette question est un cas particulier de l'exercice 270 *bis*, 5° ; toutefois le problème admet ici deux solutions, tandis qu'il n'y en a qu'une dans le cas général. On indiquera la raison de cette différence).

388. Plus généralement, trouver une inversion telle que les sommets d'un quadrilatère inscrit donné A′B′C′D′ deviennent les sommets d'un rectangle.

Montrer que les pôles d'inversion sont les points limites (ex. 152) du cercle circonscrit et de la troisième diagonale du quadrilatère A′B′C′D′.

389. Plus généralement encore, transformer par inversion quatre points donnés en les quatre sommets d'un parallélogramme.

390. Étant donnés deux cercles et un point A, trouver une inversion telle que

(1) La définition de ce mot a été donnée à l'exercice 109 et à l'exercice 271.

l'homologue du point A soit un centre de similitude des transformés des cercles donnés.

391. On joint un point variable M d'une circonférence à deux points fixes A, B : soient P, Q les points où les droites de jonction coupent à nouveau la circonférence, R le second point d'intersection de cette même courbe avec la parallèle menée par le point P à AB. Montrer que la droite QR coupe AB en un points fixe.

Déduire de là le moyen d'inscrire dans un cercle donné un triangle dont deux côtés passent par des points donnés, le troisième étant parallèle à une direction donnée ; ou dont les trois côtés passent par des points donnés. (Ces deux questions se ramènent l'une à l'autre et à l'exercice 115). — Problème analogue pour un polygone d'un nombre quelconque de côtés. (Une autre méthode est proposée dans l'exercice 253 *bis*).

392. Circonscrire à un cercle un triangle dont les sommets soient situés sur des droites données.

393. On décrit deux cercles variables tangents à une même droite, respectivement en deux points fixes A, B de cette droite et, de plus, tangents entre eux. Ces deux cercles ont une dernière tangente commune A′B′. Prouver que le cercle de diamètre A′B′ est tangent à un cercle fixe, et trouver le lieu du milieu de A′B′.

394. Deux cercles variables C, C_1 sont tangents à une circonférence donnée en deux points donnés A, B et, de plus, tangents entre eux en un point M :

1° Lieu de ce point ;

2° Lieu du second centre de similitude N des cercles C, C_1 ;

3° A chaque point N du lieu précédent correspondent deux couples de cercles C, C_1 ; C', C'_1 satisfaisant aux conditions indiquées et, par conséquent, deux points de contact M, M′.

Lieu du centre du cercle circonscrit au triangle NMM′, lieu du centre du cercle inscrit à ce même triangle et lieu du point de concours de ses hauteurs. Tout point commun à deux de ces lieux appartient au troisième.

395. Étant données deux circonférences sécantes C, C′, on circonscrit un cercle au triangle qui a pour sommets un point d'intersection A et les points de contact P, P′ d'une des tangentes communes. Montrer que l'angle sous lequel on voit la droite PP′ du centre de ce cercle est égal à l'angle des deux circonférences C, C′ et que le rayon de ce cercle est moyen proportionnel entre les rayons de ces deux circonférences (ce qui entraîne la proposition énoncée à l'exercice 262,3°). Le rapport $\frac{AP}{AP'}$ est la racine carrée du rapport de ces mêmes rayons.

396. Quelles conditions nécessaires et suffisantes doivent remplir quatre cercles A, B ; C, D pour qu'on puisse transformer, par inversion, la figure formée par les deux premiers en une figure égale à celle que forment les deux seconds ? (En employant les locutions introduites dans la note A, n° 289,294 ; quels sont les *invariants* de la figure formée par deux cercles, relativement au groupe des inversions ?)

1° Si les cercles A, B ont un point commun, il faut et il suffit que l'angle de ces deux cercles soit égal à celui des cercles C, D ; ou, ce qui revient au même (ex. précédent), que le rapport de la tangente commune à la moyenne proportionnelle des rayons ait la même valeur dans les deux cas ;

2° Si les cercles A, B sont sans point commun, il faut et il suffit que le rapport des rayons des cercles concentriques en lesquels on peut les transformer par une même inversion (ex. 248) soit égal au rapport des rayons des cercles concentriques en lesquels on peut transformer les cercles C, D par une même inversion (en général distincte de la première). (En employant les locutions de la note A, il faut et il suffit que les deux figures (A, B) et (C, D) aient même *forme réduite* par l'inversion.)

Le résultat peut encore s'exprimer ainsi : le rapport anharmonique (n° **212**) des points d'intersection de deux cercles A, B avec l'un quelconque de leurs cercles orthogonaux communs est constant, et il en est de même du rapport anharmonique de deux de ces points et des points limites. La condition cherchée est que ce rapport anharmonique ait la même valeur pour les cercles C; D que pour les cercles A, B.

Enfin, si r, r' sont les deux rayons des cercles A, B, d la distance de leurs centres, la quantité $\frac{d^2 - r^2 - r'^2}{rr'}$ doit avoir la même valeur que la quantité analogue calculée à l'aide des cercles C, D.

397. On donne deux points A, A′ et deux droites D, D′ parallèles à AA′ et à égale distance de cette droite.

1° Prouver qu'à tout point P pris sur la droite D correspond un point P′ situé sur D′ et tel que la droite PP′ soit tangente aux deux cercles PAA′, P′AA′;

2° Prouver que le produit des distances des points A, A′ à la droite PP′ est constant;

3° Trouver le lieu de la projection du point A sur PP′;

4° Trouver le point P tel que la droite PP′ passe par un point donné Q;

5° Prouver que l'angle des cercles PAA′, P′AA′ et l'angle $\widehat{PAP'}$ sont constants.

398. Soient AB un diamètre d'une circonférence C, D une perpendiculaire à ce diamètre (laquelle est supposée couper C); c, c' les circonférences qui ont pour diamètres respectifs les segments en lesquels D divise AB. On trace une circonférence tangente à C, c, D et une circonférence tangente à C, c', D. Montrer que ces deux dernières circonférences sont égales : leur rayon commun est une quatrième proportionnelle aux rayons des circonférences C, c, c'.

399. Soient A, B deux cercles tangents entre eux; C un cercle tangent aux deux premiers; C_1, un cercle tangent à A, B, C; C_2, un cercle tangent à A, B, C_1; C_3, un cercle tangent à A, B, C_2, etc.; C_n, un cercle tangent à A, B, C_{n-1}. On considère la distance du centre de l'un quelconque des cercles C, C_1, C_2,..., C_n à la ligne des centres des circonférences A, B, et le rapport de cette distance au diamètre du cercle correspondant. Prouver que ce rapport varie d'une unité lorsque l'on passe d'un de cercles au suivant, du moins tant qu'ils sont tangents entre eux extérieurement (ce qui arrivera toujours si les cercles A, B se touchent intérieurement). — Montrer comment l'énoncé doit être modifié lorsque le contact de deux cercles successifs C_{n-1}, C_n devient intérieur.

400. A, B, C étant les cercles qui ont pour centres respectifs les sommets d'un triangle et qui se touchent deux à deux extérieurement (ex. 91), on trace la circonférence qui touche A, B, C extérieurement et la circonférence qui est touchée intérieurement par ces mêmes cercles. Calculer les rayons de ces deux circonférences, connaissant les côtés a, b, c du triangle (ex. précéd., ex. 301).

401. Étant donnés trois cercles de centre A, B, C et de rayons a, b, c, soient H le

centre radical de trois cercles concentriques aux premières et de rayons $a+h$, $b+h$, $c+h$; N le point pris sur AH de manière que $\frac{AN}{AH} = \frac{a}{a+h}$. Montrer que, lorsque h varie, les points H et N décrivent deux droites, dont la première passe par les centres des circonférences tangentes (avec contact de même espèce) aux cercles donnés et la seconde par les points de contact de ces circonférences avec le cercle A.

Donner un énoncé analogue permettant de trouver les circonférences qui ont avec A, B, C des contacts d'espèces différentes.

402. Trouver un cercle qui coupe quatre cercles donnés sous des angles égaux.

403. Trouver un cercle qui coupe trois circonférences données sous des angles donnés.

(On connaît (ex. 256) l'angle sous lequel le cercle cherché coupe un quelconque des cercles qui ont, avec les circonférences données, même centre radical. Parmi ceux-ci, on en déterminera (nº **311**, note C) trois pour lesquels cet angle soit nul, de manière à être ramené au problème des cercles tangents ; ou encore (1), on en déterminera deux pour lesquels cet angle soit droit, de manière à être ramené à l'ex. 259).

403 *bis*. Étant donnés trois cercles, en trouver un quatrième qui ait avec les trois premiers des tangentes communes de longueurs données.

(Ce problème se ramène au précédent, en menant, par le point de contact de chacune des tangentes communes en question, un cercle concentrique au cercle donné correspondant).

404. On donne un cercle, deux points A, A′ sur ce cercle et une droite D. Montrer qu'il existe sur celle-ci deux points I, I′ tels, que si P, P′ désignent les intersections de D avec les droites qui joignent les points A, A′ à un point quelconque M du cercle, le produit IP. I′P′ soit constant, c'est-à-dire indépendant de la position du point M.

405. Les notations étant les mêmes que dans l'exercice précédent, si la droite D ne coupe pas le cercle, il existe, de part et d'autre de cette droite, deux points de chacun desquels on voit le segment PP′ sous un angle constant (ex. 278).

406. On donne deux cercles S et Σ sans point commun, de centres O, ω, de rayons R, ρ ; et on considère les cercles C qui sont tangents à S et orthogonaux à Σ :

1° Prouver que tous ces cercles sont tangents à un second cercle fixe ;

2° M, M′ étant les points d'intersection des cercles C, Σ, on mène, par un point fixe A pris sur Oω, des parallèles aux bissectrices des angles OωM, OωM′, jusqu'à rencontre en P, P′ avec une droite fixe D perpendiculaire à Oω. Prouver qu'il existe deux points tels que les droites qui les joignent respectivement aux points P, P′ soient toujours rectangulaires entre elles ;

---

(1) Le problème traité au numéro **311** n'admet pas toujours de solution, le point α mentionné en cet endroit pouvant être intérieur aux cercles donnés ; et ceci peut se produire dans la question actuelle, même dans des cas où celle-ci admet une solution ; on montrera que cet inconvénient peut toujours être évité par une combinaison convenable des deux méthodes que nous indiquons.